ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 30 Μαρτίου 2023

Σ. Φίλιππας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (τμ. Α)

Φυλλάδιο 8

1). Δείξτε οτι η εξίσωση

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad c \neq 0, \quad \text{σταθερά}, \tag{1}$$

ανάγεται με την αντικατάσταση $y = x/c$, $w(y,t) = u(x,t)$, $g(y,t) = f(x,t)$ στην

$$w_{tt} - w_{yy} = g(y,t).$$

Στη συνέχεια γράψτε τη λύση του προβλήματος Cauchy της (1) με αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x).$$

2). Να λυθεί το Πρόβλημα Cauchy,

$$u_{tt} - u_{xx} = t + x, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

με αρχικές συνθήκες $u(x,0) = x^3$, $u_t(x,0) = \sin 2x$.

3). Δίδεται το Π.Α.Τ. (πρόβλημα Cauchy)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= 2u_{xx}(x,t) - u_{xt}(x,t), \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

(i) Αν $\xi = x + t$, $\eta = x - 2t$ και $u(x,t) = v(\xi,\eta)$ δείξτε οτι η v ικανοποιεί

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

(ii) Στη συνέχεια βρείτε τη λύση του Π.Α.Τ., δηλ. την $u(x,t)$ για $t > 0$. Εργαστείτε όπως στην τάξη/σημειώσεις.

Παράδοση: Τετάρτη 5 Απριλίου 2023