ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2022

Άλκης Τερσένοβ

Κεφάλαιο I.

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Εισαγωγή

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα από την κλασική Φυσική.

Θεωρούμε την ελεύθερη πτώση στην ατμόσφαιρα ενός αντικειμένου μάζας 1 από ένα αρχικό σημείο όπου βρίσκεται το κέντρο μάζας του αντικειμένου (βλ. σχήμα 1 σελίδα 128). Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ας «μεταφράσουμε» αυτή τη διαδικασία στη μαθηματική γλώσσα. Έστω $s(t)$ είναι η απόσταση που κάλυψε το αντικείμενο αφού πέρασε χρόνος t από την έναρξη της πτώσης. Προφανώς η παράγωγος πρώτης τάξης της $s(t)$ είναι η ταχύτητα και η παράγωγος δεύτερης τάξης είναι η επιτάχυνση του αντικειμένου, η οποία ισούται με g:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \quad \bigl(\text{ή } \; s'' = g\bigr) \tag{1}$$

εδώ g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας (κοντά στην επιφάνεια της Γης). Ολοκληρώνοντας μια φορά έχουμε

$$v(t) \equiv \frac{ds}{dt} = gt + C_1$$

($v(t) = s'(t)$ είναι η ταχύτητα) ολοκληρώνοντας δεύτερη φορά παίρνουμε

$$s(t) = gt^2/2 + C_1 t + C_2 \tag{2}$$

όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές. Για να τις προσδιορίσουμε χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορίες. Η απόσταση από το αρχικό σημείο από όπου ξεκίνησε η πτώση τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε (έστω $t = 0$) είναι μηδέν, το ίδιο και η ταχύτητα άρα

$$s(0) = 0, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις συνθήκες και την (2) έχουμε ότι

$$s(0) = C_2 = 0, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = C_1 = 0$$

άρα η λύση του προβλήματος (1), (3) είναι

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

Οι συνθήκες (3) ονομάζονται <u>*αρχικές συνθήκες*</u> και το πρόβλημα (1), (3) ονομάζεται <u>*πρόβλημα Cauchy*</u> ή <u>*πρόβλημα αρχικών τιμών*</u>.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και παίρνοντας ορισμένο ολοκλήρωμα, ολοκληρώνοντας την (1) δυο φορές:

$$\int_0^t s''(\tau)d\tau = \int_0^t g d\tau \quad \Rightarrow \quad s'(t) = gt$$

αφού $s'(0)=0$, και

$$\int_0^t s'(\tau)d\tau = \int_0^t g\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad s(t) = g\frac{t^2}{2}$$

επειδή $s(0)=0$.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} gt = +\infty,$$

όμως είναι γνωστό ότι ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση στην ατμόσφαιρα δεν μπορεί να αναπτύξει ταχύτητες πάνω από ένα συγκεκριμένο όριο. Το «λάθος» μας ήταν ότι δεν συνυπολογίσαμε την αντίσταση της ατμόσφαιρας η οποία, για σχετικά μικρές ταχύτητες, ισούται με $kv^2(t)$, όπου $k>0$ μία σταθερά. Μετά τη διόρθωση του «λάθους» η εξίσωση παίρνει την εξής μορφή

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g - k\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 \quad \big(\text{ή } \ s'' = g - k(s')^2\big). \tag{5}$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα (5), (3) γράφουμε την (5) για την ταχύτητα $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \ \text{ με αρχική συνθήκη } \ v(0)=0. \tag{6}$$

Την εξίσωση (6) τη γράφουμε σε μορφή

$$1 = \frac{1}{g-kv^2}\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{v'}{g-kv^2}$$

και ολοκληρώνουμε απο το 0 εως t

$$\int_0^t 1\,d\tau = \int_0^t \frac{v'}{g-kv^2}d\tau = \int_0^v \frac{d\xi}{g-k\xi^2}.$$

Εδω κάναμε αλλαγή μεταβλητών $\xi = v(\tau)$ ($v(0)=0$). Προφανώς $\int_0^t 1\,d\tau = t$ και

$$\int_0^v \frac{d\xi}{g-k\xi^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\int_0^v \Big(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\xi} + \frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\xi}\Big)d\xi =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{|\sqrt{g}+\sqrt{k}v|}{|\sqrt{g}-\sqrt{k}v|}.$$

Αν υποθέσουμε οτι

$$0 \le v(t) < \sqrt{g/k} \ \text{ για } \ 0 \le t < +\infty$$

(αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε αυστηρά, βλ. σημειώσεις μου για το μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις), τότε καταλήγουμε στη σχέση

$$2\sqrt{gk}t = \ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} \quad \text{ή} \quad e^{2\sqrt{gk}t} = \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}.$$

Συνεπώς

$$v(t) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}}\frac{e^{2\sqrt{gk}t}-1}{e^{2\sqrt{gk}t}+1}, \tag{7}$$

και

$$(8) \qquad s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = \frac{1}{k}\ln\frac{e^{2\sqrt{gk}t}+1}{2} - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}}t.$$

(Το ολοκλήρωμα $\int_0^t v(\tau)d\tau$ ευκολα υπολογίζεται με αλλαγή $\eta = e^{2\sqrt{gk}\tau}$.)

Παρατηρούμε ότι

$$v_\infty = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}}\frac{e^{2\sqrt{gk}t}-1}{e^{2\sqrt{gk}t}+1} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} < +\infty$$

που αντιστοιχεί στη πραγματικότητα. Η v_∞ συχνά ονομάζεται τερματική ταχύτητα. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε οτι μπορούμε να την προσδιορίσουμε και με άλλον τρόπο, χωρίς να λύσουμε το πρόβλημα (6). Η τερματική ταχύτητα επιτυγχάνεται όταν ισορροπούν η βαρύτητα και η αντίσταση της ατμόσφαιρας, δηλαδή

$$g = k\,v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{g}/\sqrt{k}.$$

Ας πάμε πίσω στην εξίσωση (1). Έστω τώρα θέλουμε η πτώση να είναι τέτοια ώστε τη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ το αντικείμενο να βρίσκεται σε απόσταση $d > 0$ από το αρχικό σημείο (όπως και πριν την αρχική στιγμή $t = 0$ η απόσταση από το αρχικό σημείο είναι μηδέν) δηλαδή σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$(9) \qquad s(0) = 0, \quad s(t_0) = d.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση του αντικειμένου σε οποιαδήποτε στιγμή $t \in [0, t_0]$. Οι συνθήκες, που προσδιορίζουν τις σταθερές της λύσης (2), δίδονται στα άκρα του διαστήματος $[0, t_0]$, δηλαδή στο σύνορο. Από εδώ προέρχεται η ονομασία τέτοιου είδους προβλημάτων - *προβλήματα συνοριακών τιμών*. Οι συνθήκες (9) ονομάζονται *συνοριακές συνθήκες*. Προφανώς η λύση του προβλήματος (1), (9) δίνεται από τον τύπο

$$(10) \qquad s(t) = g\frac{t^2}{2} + \Big(\frac{d}{t_0} - g\frac{t_0}{2}\Big)t$$

αφού

$$s(0) = C_2 = 0$$

και

$$s(t_0) = g\frac{t_0^2}{2} + C_1 t_0 = d \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{d}{t_0} - g\frac{t_0}{2}.$$

Ενα άλλο απλό παραδειγμα είναι το εξής. Έστω ότι η μάζα ενός διαστημόπλοιου μαζί με τα καύσιμα ειναι M και χωρίς τα καυσιμα είναι m. Ας υποθέσουμε ότι το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε ακινησία (σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Γνωρίζουμε ότι αν ενεργοποιηθεί ο κινητήρας η ταχύτητα εκροής των καυσαερίων θα είναι σταθερή και θα ισούται με $\kappa > 0$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα που θα αναπτύξει το διαστημόπλοιο (μετά την ενεργοποίηση του κινητήρα) αφού καταναλωθούν όλα τα καύσιμα. Θεωρούμε οτι η κίνηση γίνεται χωρίς τριβή και χωρίς επίδραση οποιασδήποτε άλλης δύναμης.

Θα μεταφράσουμε το πρόβλημά μας στη γλώσσα των διαφορικών εξισώσεων. Έστω x η μάζα των καυσίμων που καταναλώθηκαν και η $v(x)$ η ταχύτητα που ανέπτυξε το διαστημόπλοιο αφου ξοδέψαμε x καύσιμα. Προφανώς $x \in [0, M-m]$. Ας υποθέσουμε ότι ο κινητήρας έχει καταναλώσει ακόμα ενα απειροελάχιστο ποσό καυσίμων Δx. Ποια θα είναι η μεταβολή της ταχύτητας; Σύμφωνα με τον νόμο διατήρησης της ορμής έχουμε

$$v(x+\Delta x)\big(M - x - \Delta x\big) + (\kappa + v(x))\Delta x = v(x)(M-x),$$

συνεπώς

$$\big(v(x+\Delta x) - v(x)\big)\big(M - x - \Delta x\big) = -\kappa\,\Delta x$$

άρα

$$\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{-\kappa}{M - x - \Delta x}.$$

Περνάμε στο όριο καθώς $\Delta x \to 0$ και έχουμε

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-\kappa}{M-x}. \tag{11}$$

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στην

$$v(x) = C - \kappa\, ln\frac{M}{M-x} \tag{12}$$

όπου η C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Για να την προσδιορίσουμε θα θυμηθούμε ότι για $x = 0$ το διαστημόπλοιο βρισκόταν σε ακινησία, δηλαδή $v(0) = 0$, άρα $C = 0$ διότι

$$v(0) = C - \kappa\, ln\, 1 = C = 0.$$

Συνεπώς

$$v(x) = -\kappa\, ln\frac{M}{M-x} \tag{13}$$

και η απάντηση στο ερώτημα είναι

$$v(M-m) = -\kappa\, ln\frac{M}{m}.$$

Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας είναι $\kappa\, ln(M/m)$ και το πρόσημο «$-$» μας λέει οτι το διαστημόπλοιο κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη με αυτή των καυσαερίων.

Η διαδικασία της «μετάφρασης» ενός φυσικού φαινομένου στη μαθηματική γλώσσα ονομάζεται μοντελοποίηση. Πολλά μοντέλα φυσικών (και όχι μόνο) φαινομένων ανάγονται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η λύση σε «κλειστή μορφή» δηλαδή σε μορφή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης (ή σύνθεσης συναρτήσεων) που λύνει το πρόβλημα. Ακόμα και στο παράδειγμά που μας οδήγησε στην εξίσωση (5), αν θα πάρουμε τις σταθερές k και g να είναι συναρτήσεις του ύψους (που προφανώς είναι), τότε δεν θα μπορέσουμε να βρούμε τη λύση σε κλειστή μορφή. Η επιτάχυνση βαρύτητας σε ένα ύψος h πάνω απο την επιφάνεια της Γης ισούται με

$$g_h = \frac{R^2}{(h+R)^2} g \quad \text{όπου} \quad R - \text{ακτίνα της Γης}$$

στην επιφάνεια της Γης $h = 0$ και η επιτάχυνση ισούται με g. Όσο πιο χαμηλά βρίσκεται το αντικείμενο τόσο η αντίσταση της ατμόσφαιρας μεγαλώνει λόγω αυξησης της πυκνότητας άρα k ειναι συνάρτηση του ύψους στο οποίο βρίσκεται το αντικείμενο: $k = k(h - s)$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις παρατηρήσεις, η εξίσωση (5) παίρνει την εξής μορφή

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{R^2}{(h-s+R)^2} g - k(h-s)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2. \tag{14}$$

Προφανώς και οι δυο διορθώσεις βελτιώνουν την ακρίβεια της περιγραφής του φαινομένου, όμως δεν μπορούμε να βρούμε την λύση της (14) σε κλειστή μορφη.

Ενα εύλογο ερώτημα είναι αν η λύση του προβλήματος (14), (3) υπάρχει. Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα την δώσουμε στο μάθημα **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις**.

Τρίτο παράδειγμα οπου η επίλυση ενός πρακτικού προβλήματος ανάγεται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Έστω οτι θέλουμε να βρούμε το σχήμα που πρέπει να έχει ενας καθρέφτης ο οποίος αντανακλά όλες τις ακτίνες του φωτός που εξέρχονται απο ένα συγκεκριμμένο σημείο σε ακτίνες παράλληλες με την δοσμένη κατέυθυνση.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε οτι η δοσμένη κατέυθυνση είναι ο άξονας x και οι ακτίνες εξέρχονται απο το σημείο $(0, 0, 0)$. Θεωρούμε την τομή της ζητούμενης επιφάνειας με το επίπεδο $x\,y$ (βλ. σχήμα 2α, σελίδα 128). Έστω $y > 0$, προφανώς

$$\tan\phi = \frac{|MM'|}{|NM'|} = \frac{y}{x + |NO|}.$$

Παρατηρούμε οτι $O\hat{M}N = O\hat{N}M$, διότι η γωνία πρόσπτωσης ($O\hat{M}N$) ισούται με τη γωνία ανάκλασης ($O\hat{N}M$) και συνεπώς $|NO| = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Αρα (αφού $y' = \tan\phi$) καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

της οποιας η λύση (βλ. §1 άσκηση 7 και §3 άσκηση 6) δίνεται απο τον τύπο

$$y^2 = 2C\,x + C^2 \quad (C - \text{σταθερά})$$

που είναι μια παραβολή. Συνεπώς ο ζητούμενος καθρέφτης προκύπτει απο την περιστροφή της καμπύλης αυτής γύρω απο τον άξονα x, δηλαδή είναι ένα παραβολοειδές (βλ. σχήμα 2β, σελίδα 128).

* * *

Στο εξής την άγνωστη (προσδιοριστέα) συνάρτηση θα την συμβολίζουμε με y και τη μεταβλητή με x ή t ($y = y(x)$ ή $y = y(t)$).

<u>*Συνήθης διαφορική εξίσωση*</u> ονομάζεται εξίσωση της μορφής

$$\Phi(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0, \quad n - \text{φυσικός αριθμός}$$

ή, αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$y' \ \text{ αντί για } \ \frac{dy}{dx}, \quad y'' \ \text{ αντί για } \ \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \quad \text{και} \quad y^{(n)} \ \text{ αντί για } \ \frac{d^ny}{dx^n},$$

εξίσωση της μορφής

$$\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

όπου Φ είναι συνάρτηση $n + 2$ μεταβλητών. Λέμε ότι η εξίσωση είναι σε <u>*κανονική*</u> (ή <u>*λυμένη*</u>) μορφή αν μπορεί να γραφτεί ως

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

όπου F είναι συνάρτηση $n + 1$ μεταβλητών. Π.χ.

$$(15) \qquad y' = 1 - k(x)y^2, \quad \text{εδώ} \quad F(x, y) = 1 - k(x)y^2,$$

$$(16) \qquad y''' + y\,y'' = (y')^2 - 1, \quad F(x, y, y', y'') = -y\,y'' + (y')^2 - 1,$$

$$(17) \qquad (y'')^2 - \frac{2}{3}(y')^3 + y' = 1, \quad \Phi(x, y, y', y'') = (y'')^2 - \frac{2}{3}(y')^3 + y' - 1,$$

$$(18) \qquad y'' = \lambda \sin y, \quad F(x, y, y') = \lambda \sin y,$$

όπως είχαμε διαπιστώσει η εξίσωση (15) έχει να κάνει με την ταχύτητα πτώσης αντικειμένου σε ατμόσφαιρα, $k(x)$ είναι δοσμένη συνάρτηση, οι εξισώσεις (16), (17) εμφανίζονται στην άερο- και υδροδυναμική (οριακά στρώματα), η (18) στην κβαντομηχανική, C, λ είναι κάποιες σταθερές,

$$(19) \qquad y' = \kappa(x)y, \quad F(x, y) = k(x)y,$$

αυτή η εξίσωση (ο νόμος του $Malthous$) με δοσμένη συνάρτηση $\kappa(x)$ εμφανίζεται στην βιολογία. Η εξίσωση

$$(21) \qquad y'' + by' + a^2y = 0, \quad F(x, y, y') = -by' - a^2y,$$

όπου a, b σταθερές, περιγράφει τις ελαστικές ταλαντώσεις με απόσβεση ενω η εξίσωση $Riccati$

$$(22) \qquad y' = c(x)y^2 + d(x)y + g(x), \quad F(x, y) = -c(x)y^2 - d(x)y - g(x).$$

έχει εφαρμογές στην κλασική μηχανική και κβαντομηχανική, εδώ $g(x)$, $c(x)$, $d(x)$ καποιές δοσμένες συναρτήσεις.

Στην εξίσωση

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{C\sqrt{y_1 - y}}$$

με χρήση του Λογισμού Μεταβολών, ανάγεται το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου. Μια σφαίρα αφήνεται να ολισθήσει χωρίς τριβή υπό την επίδραση της βαρύτητας απο ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ σε ένα σημείο $B(x_2, y_2)$ κατά μήκος μιας «τσουλίθρας» που ορίζεται απο μια καμπύλη $y = y(x)$. Εδω $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$ (βλ. σχήμα 3, σελίδα 128). Το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου είναι: ποια καμπύλη δίνει τον ταχύτερο χρόνο καθόδου ;

Η λύση της εξίσωσης (η οποία μας δίνει και την απάντηση στο ερώτημα) είναι η καμπύλη που ονομάζεται κυκλοειδές.

Υπάρχουν και πολλά άλλα φαινομενα που περιγράφονται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

* * *

Μια n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ονομάζεται *λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \quad x \in I \subset \mathbf{R}$$

ή της

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad x \in I \subset \mathbf{R}$$

αν η $y(x)$ επαληθεύει την εξίσωση για κάθε $x \in I$. Δηλαδή η αντικατάσταση της $y(x)$ στην εξίσωση μας δίνει ταυτότητα. Π.χ. οι (2), (4) και η (10) είναι λύσεις της (1), η (7) είναι λύση της (6), η (8) της (5) και οι (12), (13) της (11).

Τάξη μιας εξίσωσης ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στην εξίσωση. Π.χ. η τάξη των (6), (11), (15), (20) και της (22) είναι 1, η τάξη των (1), (5), (14), (17), (18) και (21) είναι 2, η τάξη της (16) είναι 3.

Μια εξίσωση ονομάζεται *γραμμική* αν η συνάρτηση Φ είναι γραμμική ως προς τις $y, y', ..., y^{(n)}$, δηλαδή έχει τη μορφή

$$\Phi = f(x) + a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_n(x)y^{(n)},$$

σε αντίθετη περίπτωση η εξίσωση ονομάζεται *μη γραμμική*. Η γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης n τάξεως είναι

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

όπου $a_i(x), \ \ i = 1, ..., n$, $f(x)$ δοσμένες συναρτήσεις, οι $a_i(x), \ \ i = 1, ..., n$ ονομάζονται *συντελεστές* της εξίσωσης και η $f(x)$ *το δεξί (ή δευτερο) μέρος* της εξίσωσης.

Μια εξίσωση σε κανονική μορφή ονομάζεται *γραμμική* αν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς τις $y, y', ..., y^{(n-1)}$. Η γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης n τάξεως σε κανονική μορφή είναι

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{23}$$

Προφανώς οι εξισώσεις (1), (0,9), (19) και (21) είναι γραμμικές, ενω οι (5), (6), (14) - (18) και (20), (22) είναι μη γραμμικές.

Αν πάμε πίσω στην εξίσωση (1), βλέπουμε οτι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις (2), για να προσδιορίσουμε μια και μοναδική χρειαζόμαστε επιπλέον συνθήκες π.χ. αρχικές (3) ή συνοριακές (9). Αν πάμε στην εξίσωση (11) επίσης βλέπουμε ότι αυτη έχει άπειρες λύσεις (12) και η αρχική συνθήκη μας εξασφαλίζει την μοναδική λύση (13). Παρατηρούμε ότι για την εξίσωση πρώτης τάξης για να προσδιορίσουμε την μοναδική λύση χρειαζόμαστε μια συνθήκη ενώ για την εξίσωση δεύτερης τάξης 2, στην περίπτωση εξίσωσης n τάξης χρειαζόμαστε n συνθήκες.

Γενική λύση της εξίσωσης σε κανονική μορφή είναι ένας τύπος που περιέχει όλες τις λύσεις της εξίσωσης. *Μερική (ή ειδική) λύση* της εξίσωσης είναι μία συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης.

Π.χ. ο τύπος (2) είναι γενική λύση της εξίσωσης (1) ενώ οι συναρτήσεις (4) και (10) ειναι μερικές λύσεις της (1), ο τύπος (12) είναι γενική λυση της (11), η συνάρτηση (13) είναι η μερική λύση της (11).

* * *

Μερικές φορές η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών υπάρχει παντου δηλαδή για όλες τιμές της μεταβλητής ενώ μερικές φορές όχι. Π.χ. η λύση του προβλήματος (6) είναι η συνάρτηση (7) η οποία ορίζεται για όλες τις τιμές της μεταβλητής t, η λύση του προβλήματος

$$\frac{dy}{dx} = y, \;\; y(0) = 1$$

είναι η συνάρτηση $y(x) = e^x$ η οποία ορίζεται για όλα τα x, ενώ η λύση του προβλήματος

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \;\; y(0) = 1,$$

είναι η συνάρτηση

$$y(x) = (1 - x)^{-1}$$

και υπάρχει μόνο για $x < 1$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε παράδειγμα όπου η λύση θα υπάρχει μόνο σε ένα διάστημα (a, b) γύρω απο το σημείο 0, ή να μην υπάρχει καθόλου. Έχουμε εδώ ενα εύλογο ερώτημα: πότε συμβαίνει το ένα και πότε το άλλο και γιατί;

Επίσης είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν η λύση του προβλήματος είναι μοναδική. Π.χ. το πρόβλημα

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \;\; y(0) = 0,$$

έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, την

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & \text{για } x \geq 0 \\ 0, & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

και την $y(x) \equiv 0$. Μπορούμε να δείξουμε οτι το προβλημα αυτό έχει άπειρες λύσεις. Η μοναδικότητα παραβιάζεται. Άρα πρέπει να ξέρουμε υπο ποιες προϋποθέσεις η λύση είναι μοναδική.

Τις απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα θα τις μάθετε στο μάθημα **Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις**. Στο μάθημα **Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις** θα περιοριστούμε με την επίλυση των εξισώσεων για τις οποίες μπορούμε να βρούμε τη λύση σε «κλειστή μορφή».

§1. Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Κατ αρχάς ας θυμηθούμε το Θεώρημα της αλλαγής μεταβλητών σε ορισμένα και αόριστα ολοκληρώματα. Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής και η y παραγωγίσιμη τότε ισχύει οτι

$$\int h(y(x))y'(x)dx = \int h(y)dy,$$

$$\int_a^b h(y(x))y'(x)dx = \int_{y(a)}^{y(b)} h(y)dy.$$

Οταν ολοκληρώνουμε απο a μέχρι x (δηλαδή δεν έχουμε σταθεροποιήσει το άνω όριο της ολοκλήρωσης), τότε

$$\int_a^x h(y(\xi))y'(\xi)d\xi = \int_{y(a)}^{y} h(\eta)d\eta, \quad (y = y(x)).$$

* * *

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \ \text{ ή } \ y' = F(x,y) \tag{1.1}$$

ονομάζεται <u>*εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές*</u> αν η F μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο συναρτήσεων όπου η μια είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x και η άλλη μονο της y, δηλαδή

$$F(x,y) = f(x)\,\phi(y) \ \text{ ή } \ F(x,y) = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση η (1.1) παίρνε τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \ \text{ ή } \ y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1.2}$$

και μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \ \text{ ή συμβολικά } \quad g(y)dy = f(x)dx. \tag{1.3}$$

Ολοκληρώνοντας θα έχουμε

$$\int g(y(x))y'(x)dx = \int f(x)dx + C$$

ή ισοδύναμα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, ($y = y(x)$)

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \tag{1.4}$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Συνεπώς η επίλυση της (1.2) ανάγεται στον προσδιορισμό των παραγουσών των g και f. Έστω $G(y)$ κάποια παράγουσα της $g(y)$ και $F(x)$ κάποια παράγουσα της $f(x)$ $\big(G'(y) = g(y)$ και $F'(x) = f(x)\big)$ τότε τη σχέση (1.4) την γράφουμε ως

$$G(y) = F(x) + C. \tag{1.5}$$

Ο τύπος (1.4) $\big($ ή (1.5)$\big)$ μας δίνει την γενική λύση της (1.2). Για να προσδιορίσουμε κάποια συγκεκριμένη (μερική) λύση θα πρέπει να προσθέσουμε στην εξίσωση την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0$$

όπου x_0 και y_0 είναι δοσμένοι αριθμοί. Σε αυτήν την περίπτωση την σταθερά την προσδιορίζουμε από τη σχέση

$$C = G(y_0) - F(x_0)$$

αφού αν $x = x_0$ τότε $y = y_0$, ή αλλιώς ολοκληρώνουμε την σχέση (1.3) παίρνοντας ορισμένο ολοκλήρωμα με x να μεταβάλλεται απο x_0 και y από y_0, δηλαδή

$$\int_{y_0}^{y} g(\eta)d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi. \tag{1.6}$$

Πιο αναλυτικά, ολοκληρώνουμε την (1.3) απο x_0 εως κάποιο x:

$$\int_{x_0}^{x} g(y(\xi))y'(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$$

και η (1.6) προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής (αφού $y(x_0) = y_0$).

Παράδειγμα 1.1. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{y^2} = dx \tag{1.7}$$

άρα

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C,$$

συνεπώς

$$\frac{1}{y} = -C - x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{C+x}. \tag{1.8}$$

Όμως λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός ότι το μηδέν (δηλαδή η συνάρτηση $y(x) \equiv 0$) είναι λύση της εξίσωσης μας καταλήγουμε στο ότι η γενική λύση είναι η

$$y = \frac{-1}{C+x} \;\text{ και }\; y \equiv 0. \tag{1.8}$$

Τη μηδενική λύση την «χάσαμε» όταν διαιρέσαμε δια y.

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης που επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \neq 0$$

(δηλαδή τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών) μπορούμε, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, να ενεργήσουμε με δυο τρόπους.

1. Αντικαθιστώντας $x = x_0$, $y = y_0$ στην σχέση (1.8) θα προσδιορίσουμε τη σταθερά C:

$$y(x_0) = \frac{-1}{C + x_0} = y_0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{y_0} - x_0.$$

Άρα η μερική λύση που ψάχνουμε είναι η

$$y(x) = \frac{1}{1/y_0 + x_0 - x}.$$

Για $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ έχουμε

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

2. Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.7) από x_0 εως x και από y_0 εως y:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_{x_0}^{x} d\xi$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} = x_0 - x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{1/y_0 + x_0 - x}.$$

Παρατηρηση 1. Αν κάποια λύση της εξίσωσης $y' = y^2$ μηδενίζεται σε ένα σημείο (έστω x_0), τότε είναι μηδέν παντού. Αυτό προκύπτει απο το Θεώρημα μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ (το σχετικό θεώρημα αποδεικνύεται στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις). Διότι θεωρώντας το πρόβλημα:

$$y' = y^2, \;\; y(x_0) = 0$$

διαπιστώνουμε οτι $y(x) \equiv 0$ είναι λύση και απο μοναδικότητα έχουμε οτι δεν υπάρχει άλλη.

Παράδειγμα 1.2. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \tag{1.9}$$

ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow \quad ln|y| = ln|x| + C,$$

συνεπώς

$$|y| = e^C |x|$$

αρα (αφου θέλουμε η λύση να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση)

$$y = \pm e^C x.$$

Την σχέση $y = \pm e^C x$ μπορούμε να τη γράψουμε ως $y = C_1 x$ όπου C_1 αυθαίρετη σταθερά διάφορη του μηδενός (αφού η εκθετική συνάρτηση δεν μηδενίζεται πουθενά). Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η συνάρτηση

$y(x) \equiv 0$ είναι λύση της εξίσωσης μας καταλήγουμε στο ότι η γενική λύση είναι η

$$y(x) = C_1 x \text{ με τυχαίο } C_1 \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης που επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \ \ (x_0 \neq 0)$$

μπορούμε, να ενεργήσουμε με δυο τρόπους.

1. Αντικαθιστώντας $x = x_0$, $y = y_0$ στην σχέση (1.10) θα προσδιορίσουμε τη σταθερά C_1:

$$y(x_0) = C_1 x_0 = y_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{y_0}{x_0}.$$

Άρα η μερική λύση που επαληθεύει την αρχική συνθήκη είναι η

$$y(x) = \frac{y_0}{x_0} x.$$

2. Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.9) από x_0 εως x και από y_0 εως y:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi}$$

παίρνουμε

$$ln|y| - ln|y_0| = ln|x| - ln|x_0| \quad \Rightarrow \quad ln\Big|\frac{y}{y_0}\Big| = ln\Big|\frac{x}{x_0}\Big| \quad \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0},$$

δηλαδή

$$y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

Παρατηρηση 2. Η αρχική συνθήκη δοσμένη στο $x = 0$ ή δεν προσδιορίζει την σταθερα (αν θέτουμε $y(0) = 0$) ή δεν δίνει λύση (αν θέτουμε $y(0) = y_0 \neq 0$). Αυτό συμβαίνει επειδή στο σημείο $x = 0$ η συνάρτηση $F(x, y) = y/x$ δεν είναι συνεχής. Δηλαδή για την εξίσωση (1.9) το πρόβλημα $Cauchy$ με αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ έχει άπειρες λύσεις ($y = C\,x$ με τυχαία σταθερά $C \in \mathbf{R}$) ενώ το πρόβλημα $Cauchy$ με αρχική συνθήκη $y(0) = y_0 \neq 0$ δεν έχει λύση.

Παρατηρηση 3. Σχετικά με τις συναρτήσεις $y = C|x|$ που απορρίφθηκαν λόγω μη παραγωγισιμότητας (στο $x = 0$) βλ. το μάθημα ΣΔΕ.

* * *

Θα δούμε τωρα τρεις περιπτώσεις εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις με χωρισμένες μεταβλητές.

I. Πρώτη περίπτωση είναι η εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) \tag{1.11}$$

όπου a, $b-$ σταθερές. Για να λύσουμε τετοίου είδους εξισώσεις εισάγουμε καινούργια συνάρτηση $z(x) = ax + by(x)$ για την οποία προφανως έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

αρα, λαμβάνοντας υπ όψιν την (1.11),

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

συνεπώς

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

και

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C.$$

Απο εδώ προσδιορίζουμε την $z(x)$ και κατόπιν την $y(x)$.

Παράδειγμα 1.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Λύση. Εισάγουμε την $z = 2x + y$ για την οποία ισχύει

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + 2, \quad \frac{dz}{dx} = z + 2.$$

Συνεπώς

$$\frac{dz}{z + 2} = dx, \quad ln|z + 2| = x + C, \quad z + 2 = \pm e^C e^x,$$

αρα

$$z = \tilde{C}e^x - 2, \quad \tilde{C} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

και αφου $z = -2$ είναι λύση

$$z = Ce^x - 2, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Συνεπώς

$$2x + y = Ce^x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^x - 2x - 2.$$

Για να προσδιορίσουμε τη λύση η οποία επαληθευει την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ ο ευκολότερος τρόπος είναι να προσδιορίσουμε την αυθαίρετη σταθερά αντικαθιστώντας την αρχική συνθήκη στην γενική λύση:

$$y_0 = Ce^{x_0} - 2x_0 - 2$$

άρα

$$C = e^{-x_0}(y_0 + 2x_0 + 2)$$

επομένως η ζητούμενη λύση είναι

$$y(x) = e^{-x_0}(y_0 + 2x_0 + 2)e^x - 2x - 2.$$

II. Δεύτερη περίπτωση - εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

η οποια ονομάζεται <u>ομογενής εξίσωση πρώτου βαθμού</u>. Για να λύσουμε τέτοιου είδους εξισώσεις εισάγουμε καινούργια συνάρτηση

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \;\text{ ή }\; y(x) = xz(x).$$

Προφανώς
$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$
και
$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$
Συνεπώς
$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = ln|x| + lnC \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}.$$
Απο δω προσδιορίζουμε την $z(x)$ και μετά την $y(x)$.

Παράδειγμα 1.4. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tan\frac{y}{x}.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση
$$y = x\,z$$
προφανώς
$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z.$$
Έχουμε
$$x\frac{dz}{dx} + z = z + tan\,z \quad \Rightarrow \quad \frac{cos\,z\,dz}{\sin\,z} = \frac{dx}{x}$$
άρα
$$\ln|\sin\,z| = \ln|x| + C, \;\; \sin\,z = \pm e^{C}x$$
και αφου $z = 0$ είναι λύση της $z' = tan\,z$ η γενική λύση θα είναι
$$z = \arcsin Cx, \quad C \in \mathbf{R}$$
Συνεπώς
$$y(x) = x\,\arcsin\,Cx, \quad C \in \mathbf{R}.$$
Αν θέλουμε $y(x_0) = y_0 \;\; (x_0 \neq 0)$, τότε εύκολα καταλήγουμε στο ότι
$$C = \frac{1}{x_0}\sin\frac{y_0}{x_0}.$$

Εδώ (όπως και στο Παράδειγμα 1.2 και για ίδιους λόγους) στο σημείο $x_0 = 0$ δεν μπορούμε να βάλουμε αυθαίρετο y_0.

Με τον ίδιο τρόπο λύνεται η εξίσωση
$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$
όταν οι M και N ειναι ομογενείς συναρτήσεις ίδιου βαθμού, δηλαδή
$$M(\kappa x, \kappa y) = \kappa^m M(x,y), \quad N(\kappa x, \kappa y) = \kappa^m N(x,y), \quad \forall \kappa.$$
Πράγματι
$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(x\cdot 1, x\frac{y}{x})}{N(x\cdot 1, x\frac{y}{x})} = \frac{x^m M(1,\frac{y}{x})}{x^m N(1,\frac{y}{x})} = \frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} = f\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

Άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή
$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Παράδειγμα 1.5. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Λύση. Εδώ
$$M(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x)^2 - (\kappa y)^2 = \kappa^2(x^2 - y^2) = \kappa^2 M(x, y),$$
$$N(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x)^2 + (\kappa y)^2 = \kappa^2(x^2 + y^2) = \kappa^2 N(x, y).$$
Αρα κάνουμε την αντικατάσταση
$$y = x\,z$$
και έχουμε
$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} - z$$
δηλαδη
$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z - z^2 - z^3}{1 + z^2}.$$
Η γενική λύση της τελευταίας είναι
$$\int \frac{1 + z^2}{1 - z - z^2 - z^3} dz = \ln|x| + C.$$
Αν θέλουμε π.χ. $y(1) = -1$ και συνεπώς $z(1) = -1$ τότε η z που ψάχνουμε προκύπτει απο την σχέση (βλ. (1.6))
$$\int_{-1}^{z} \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta - \zeta^2 - \zeta^3} d\zeta = \ln|x|$$
αφου $\ln|\xi|\Big|_1^x = \ln|x|$, έπειτα αντικαθιστούμε το z με y/x.

III. Τρίτη περίπτωση. Θεωρούμε εξίσωση της μορφής
$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\Big) \tag{1.12}$$
Υποθέτουμε οτι οι ευθείες
$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{1.13}$$
τέμνονται στο σημείο (x^*, y^*) (δηλαδή το αλγεβρικό σύστημα (1.13) έχει μοναδική λύση (x^*, y^*)). Κάνουμε την εξής αντικατάσταση
$$\xi = x - x^*, \quad \eta = y - y^*.$$
Προφανώς ισχύει
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$$

και
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Big(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\Big)$$
δηλαδή
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Big(\frac{a_1 + b_1\eta/\xi}{a_2 + b_2\eta/\xi}\Big) = \phi(\frac{\eta}{\xi}).$$
Άρα καταλήξαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Αν τώρα οι ευθέιες (1.13) είναι παράλληλες, τότε ισχύει
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$
και η εξίσωση (1.12) παίρνει τη μορφή
$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\Big) = F(a_1x + b_1y)$$
δηλαδή έχουμε την πρώτη περίπτωση.

Παράδειγμα 1.6. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$
Λύση. Η λύση του αλγεβρικού συστήματος
$$x - y + 1 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$
είναι $x^* = 1$, $y^* = 2$. Η αντικατάσταση $\xi = x - 1$, $\eta = y - 2$ μας οδηγεί στην
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}.$$
Για την συνάρτηση $z(\xi)$, όπου $\eta(\xi) = \xi\, z(\xi)$, έχουμε
$$z + \xi\frac{dz}{d\xi} = \frac{1 - z}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{d\xi}{\xi}$$
ολοκληρώνοντας παίρνουμε
$$-\frac{1}{2}ln|1 - 2z - z^2| = ln|\xi| + C$$
άρα
$$ln(|1 - 2z - z^2|\,\xi^2) = -2C \quad \Rightarrow \quad (1 - 2z - z^2)\xi^2 = C_1.$$
Συνεπώς
$$(1 - 2z - z^2)\xi^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad \xi^2 - 2\xi\eta - \eta^2 = C_1$$
άρα
$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$
Εδω έχουμε την γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

Αν θέλουμε π.χ. να ισχύει $y(0) = 1$, τότε $C_1 = 5$.

Η απλούστερη μορφή μιας εξίσωσης με χωρισμένες μεταβλητές είναι η
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \;\text{ ή }\; dy = f(x)dx.$$

Προφανώς η λύση της είναι

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Αν επιπλέον θέλουμε $y(x_0) = y_0$, τότε

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Ασκήσεις

Προσδιορίστε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων και έπειτα να βρείτε τη λύση του προβλήματος $Cauchy$:

1.

$$\frac{dy}{dx} = k(x)y, \quad y(x_0) = y_0,$$

2.

$$\frac{dy}{dx} = y^4, \quad y(0) = -1,$$

3.

$$y\frac{dy}{dx} + (1 + y^2)\cos x = 0, \quad y(0) = 2$$

4.

$$\frac{dy}{dx} = y - 2x, \quad y(0) = 0,$$

5.

$$\frac{dy}{dx} = y - y^2, \quad y(x_0) = y_0 \quad (\forall y_0 \in \mathbf{R}),$$

6.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - y} + 1, \quad y(1) = 0.$$

Εξετάστε επίσης την περίπτωση $y(1) = 1$.

7.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y(0) = 1.$$

8.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x}{y - x}, \quad y(0) = 1,$$

9.

$$\frac{dy}{dx} = 4 - y^2, \quad y(0) = 1.$$

10. Να να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

§2. Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης έχουν την εξής μορφή (βλ. (23))

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

όπου οι $p(x)$, $f(x)$ είναι δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις. Η $p(x)$ ονομάζεται συντελεστής και η $f(x)$ το δεύτερο μέρος της εξίσωσης. Αν $f(x) \equiv 0$ τότε η (2.1) ονομάζετε ομογενής εξίσωση. Ας ξεκινήσουμε με αυτην την περίπτωση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.2}$$

ή

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -p(x) \ \text{ ή ισοδύναμα } \ \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

(άρα εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές) ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C, \quad C > 0$$

και

$$y(x) = \pm e^C e^{-\int p(x)dx}.$$

Αφου C αυθαίρετη θετική σταθερά, τότε η $\pm e^C$ είναι αυθαίρετη σταθερά διάφορη του μηδενός. Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι το μηδέν είναι λύση της (2.1) την οποία την «χάσαμε» όταν διαιρέσαμε δια το y, καταλήγουμε στον τύπο

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbf{R} \tag{2.3}$$

εδω C τίναι τυχάια σταθερα (όχι απαραίτητα διάφορη του μηδενός). Άρα ο τύπος (2.3) μας δίνει την γενική λύση της εξίσωσης (2.2).

Ας βρούμε τωρα τη γενική λύση της εξίσωσης (2.1). Θα αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό

$$\underline{\textit{Γενική λύση της}} \ (2.1) =$$

$$\underline{\textit{γενική λύση της}} \ (2.2) \ + \ \underline{\textit{μερική λυση της}} \ (2.1). \tag{2.4}$$

Ο τύπος (2.4) μας λέει οτι αν βρήκαμε κάποια λύση της (2.1) έστω $y_\mu(x)$, τότε οποιαδήποτε αλλή λύση $y_1(x)$ της (2.1) θα έχει τη μορφή

$$y_1(x) = y_\mu(x) + y_o(x)$$

όπου $y_o(x)$ κάποια λύση της (2.2). Άρα για να αποδείξουμε την (2.4) αρκεί να δείξουμε οτι η $y_o(x) = y_1(x) - y_\mu(x)$ είναι όντως λύση της (2.2). Πράγματι έχουμε

$$\frac{dy_o}{dx} + p(x)y_o = \frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 - \big(\frac{dy_\mu}{dx} + p(x)y_\mu\big) = f(x) - f(x) = 0$$

η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι και η y_1 και η y_μ είναι λύσεις της (2.1).

Συνεπώς για να βρούμε τη γενική λύση της (2.1) (αφού έχουμε ήδη βρει την γενική λυση της (2.2)) αρκεί να βρούμε μερική (δηλαδή κάποια) λύση της (2.1). Θα χρησιμοποίησουμε τη *μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών*. Ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$y(x) = c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.5}$$

αντί για σταθερά C στον τύπο (2.3) παίρνουμε συνάρτηση $c(x)$, δηλαδή η «σταθερά C μεταβάλλεται». Για να βρούμε τη μερική λύση πρέπει να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $c(x)$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση (2.5) και έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.6}$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην εξίσωση (2.1) παίρνουμε

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

άρα

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

και

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια μερική λύση, π.χ. μπορούμε να πάρουμε $C_1 = 0$. Άρα η μερική λύση της (2.1) που ψάχνουμε είναι η

$$y_\mu(x) = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (2.1) δίνεται απο τον τύπο

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{2.7}$$

Αν θέλουμε τώρα να λύσουμε πρόβλημα αρχικών τιμών, προσδιορίζουμε την αυθαίρετη σταθερά στον τύπο (2.7) χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη.

Παρατηρισή 1. Η σχέση (2.4) ισχύει μόνο για γραμμικές εξισώσεις. Αυτο εξάλλου φαίνεται και απο την απόδειξη που κάναμε.

Παράδειγμα 2.1 Να βρεθεί η γενική λύση της

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \tag{2.8}$$

Λύση. Εδώ

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad f(x) = x^2.$$

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι (βλ. Παράδειγμα 1.2)

$$y(x) = Cx.$$

Ψάχνουμε τη μερική λύση της αρχικής εξίσωσης σε μορφή $c(x)x$

$$\frac{d(c(x)x)}{dx} = x\frac{dc}{dx} + c$$

άρα

$$x\frac{dc}{dx} = x^2 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y_\mu = \frac{x^3}{2}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (2.8) είναι η

$$y(x) = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη λύση της (2.8) που επαληθεύει την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$ τότε έχουμε απο την γενική λύση

$$y(1) = C + \frac{1}{2} \;\text{ άρα }\; C = \frac{1}{2}.$$

Όπως και στο Παράδειγμα 1.2 παρατηρούμε ότι αρχικές συνθήκες δοσμένες στο $x = 0$ ή δεν προσδιορίζουν την σταθερά (αν θέσουμε $y(0) = 0$) ή δεν δίνουν λύση (αν θέσουμε $y(0) = y_0 \neq 0$).

Παρατήρηση 2. Η προσέγγιση που έχουμε αναπτύξει θα μας είναι χρήσιμη στην μελέτη των γραμμικών εξισώσεων ανώτερης τάξης (βλ. $\S 4$ - $\S 7$). Η γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης μπορεί να λυθεί και με πιο απλό τρόπο. Πράγματι, πολλαπλασιάζουμε την (2.1) με

$$e^{\int p(x)dx},$$

προφανώς έχουμε

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Ολοκληρώνωντας παίρνουμε

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

άρα

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Παράδειγμα 2.2. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης (2.8) (βλ. το προηγούμενο παράδειγμα).

Λύση. Εδώ

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

συνεπώς

$$e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} 1/x, & \text{για } x > 0 \\ -1/x, & \text{για } x < 0 \end{cases}.$$

Αρα η (2.8) γράφεται ως

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = x$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + C \ \text{ ή } \ y = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

* * *

Πολλές εξισώσεις ανάγονται στις γραμμικές με κάποιες διαδικασίες (μερικές φορες αρκετά πολυπλοκές). Θα περιοριστούμε με δυο απλές περιπτώσεις.

I. Η εξίσωση $Bernoulli$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1 \tag{2.9}$$

ανάγεται στην γραμμική εξίσωση με αντικατάσταση $z = y^{1-n}$. Πράγματι

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\big(f(x)y^n - p(x)y\big) =$$
$$(1-n)\big(f(x) - p(x)y^{1-n}\big) = (1-n)\big(f(x) - p(x)z\big)$$

Συνεπώς για την $z(x)$ έχουμε γραμμική εξίσωση

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x).$$

II. Εξίσωση $Riccati$

$$\frac{dy}{dx} + \tilde{p}(x)y + q(x)y^2 = \tilde{f}(x). \tag{2.10}$$

Στην γενική περίπτωση είναι αδύνατον να βρεθεί γενική λύση σε κλειστή μορφή, αν όμως γνωρίζουμε κάποια μερική λύση της έστω την $y_1(x)$ τότε αντικαθιστώντας την $y = y_1 + z$ στην (2.10) έχουμε ότι η $z = y - y_1$ ικανοποιεί την εξίσωση $Bernoulli$

$$\frac{dz}{dx} + [\tilde{p}(x) + 2q(x)y_1(x)]z + q(x)z^2 = 0.$$

Πράγματι

$$\frac{dz}{dx} + [\tilde{p} + 2qy_1]z + qz^2 =$$
$$\frac{dy}{dx} + \tilde{p}y + qy^2 - \Big(\frac{dy_1}{dx} + \tilde{p}y_1 + qy_1^2\Big) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x) = 0$$

αφού και η $y(x)$ και η $y_1(x)$ ικανοποιούν την (2.10).

Παράδειγμα 2.3. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2} \tag{2.11}$$

Λύση. Προφανώς είναι εξίσωση $Riccati$ με

$$\tilde{p}(x) = 0, \quad q(x) = -1, \quad f(x) = -2/x^2.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $y_1(x) = 1/x$ είναι (μερική) λύση της εξίσωσης (2.11). Θέτουμε

$$y = z + \frac{1}{x},$$

και έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = \Big(z + \frac{1}{x}\Big)^2 - \frac{2}{x^2}$$

ή

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2\frac{z}{x}$$

που είναι εξίσωση $Bernoulli$ (2.9) με

$$p(x) = -2/x, \quad f(x) \equiv 1 \ \text{ και } \ n = 2.$$

Για να την λύσουμε εισάγουμε τη συνάρτηση

$$u(x) = \frac{1}{z(x)}$$

η οποία ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u - 1 \tag{2.12}$$

αφού

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^2}\big(z^2 + 2\frac{z}{x}\big).$$

Σύμφωνα με τον τύπο (2.4) για να βρούμε τη γενική λύση της (2.12) πρώτα βρίσκουμε την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης δηλαδή της

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x} \tag{2.13}$$

που είναι η συνάρτηση

$$u_{\gamma o}(x) = \frac{C}{x^2}$$

(αφού απο την (2.13) έχουμε $\ln|u| = -2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|u|x^2 = C$).

Προσδιορίζουμε τώρα τη μερική λύση της (2.12) εφαρμόζοντας την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών: ψάχνουμε τη μερική λύση u_μ σε μορφή

$$u_\mu(x) = \frac{c(x)}{x^2}.$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση στην (2.12), παίρνουμε

$$\frac{1}{x^2}\frac{dc}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1$$

όπου την σταθερά C_1 μπορούμε να την πάρουμε να είναι μηδέν. Άρα

$$u_\mu(x) = -x/3$$

και η γενική λύση της (2.12) είναι η εξής

$$u(x) = u_{\gamma o}(x) + u_\mu(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{3}.$$

Έχουμε

$$y(x) = z(x) + \frac{1}{x} = \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{x} = \frac{3x^2}{3C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (2.11) είναι

$$y(x) = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x} \;\; \text{και} \;\; \frac{1}{x}.$$

Παρατηρούμε οτι η λύση $1/x$ αντιστοιχεί στην $z \equiv 0$ την οποία την ¨ξεχάσαμε¨ όταν διαιρέσαμε με z.

Τέλος ας δούμε την απλούστερη περίπτωση $p(x) \equiv 0$. Η εξίσωση (2.1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

και η επίλυσή της είναι η ολοκλήρωση της εξίσωσης, δηλαδή

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Ασκήσεις.

Προσδιορίστε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων γραμμικών εξισώσεων και έπειτα να βρείτε τη λύση του προβλήματος $Cauchy$:

1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{cos\, x}{\sin\, x} y = 2x \sin x, \;\; y(\frac{\pi}{2}) = 0,$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + (\sin x)\, y = e^{\cos x}, \;\; y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2},$$

3.

$$\frac{dy}{dx} = y + \cos\, x, \;\; y(0) = 1,$$

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}, \;\; y(1) = -1.$$

Υπόδειξη. Η εξίσωση ανάγεται σε γραμμική.

5.

$$\frac{dy}{dx} = x\, \sin x^2, \;\; y(0) = \frac{1}{2}.$$

6. Θεωρούμε την εξίσωση

$$(*) \qquad y' - \frac{2}{t} y = -t^2, \;\; t > 0.$$

Διαπιστώστε ότι το πρόβλημα $Cauchy$ για την $(*)$ με αρχική συνθήκη $y(0) = y_0 \neq 0$ δεν έχει λύση, με αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ έχει άπειρες λύσεις, με αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$ έχει μοναδική λύση για κάθε y_0 αν $t_0 \neq 0$.

7. Βρείτε μια λύση της εξίσωσης $Riccati$

$$y' = y^2 - x^2 + 1$$

και έπειτα προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης.

§3. Πλήρεις εξισώσεις

Θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

την οποία συμβολικά την γράφουμε ως

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{3.1}$$

Υποθέτουμε οτι οι $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Λέμε ότι η εξίσωση (3.1) είναι *πλήρης* αν υπάρχει μια συνάρτηση $u(x,y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \ \text{ και } \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \tag{3.2}$$

Σε αυτή τη περίπτωση η γενική λύση της (3.1) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή απο τον ακόλουθο τύπο

$$u(x,y) = C \tag{3.3}$$

(C οπως πάντα μια αυθαίρετη σταθερά). Αν επιπλέον έχουμε αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y_0$, τότε η σταθερά C προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την σχέση

$$u(x_0, y_0) = C.$$

Για να δικαιολογήσουμε τον τύπο (3.3) πρώτα θα απαντήσουμε στο ερώτημα πότε υπάρχει τέτοια $u(x,y)$ και αν υπάρχει πως μπορούμε να την προσδιορίσουμε; Όπως γνωρίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

ονομάζεται συντηρητικό αν υπάρχει μια συνάρτηση $v(x,y,z)$ (το δυναμικό του $\mathbf{F}$) τέτοια ωστε

$$\nabla v \equiv \Big(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\Big) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Αυτο συμβαίνει αν και μόνο αν το διανισματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο:

$$curl\mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Αν πάρουμε $\mathbf{F} = (M(x,y), N(x,y), 0)$ τότε

$$curl\mathbf{F} \equiv curl(M(x,y), N(x,y), 0) = \big(0, 0, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\big)$$

και η συνθήκη (3.4) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Συνεπώς η απάντηση στο ερώτημα «πότε υπάρχει τέτοια $u(x,y)$;» είναι: *αν και μόνο αν ισχύει η* (3.5). Για να προσδιορίσουμε την $u(x,y)$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.2).

Είμαστε τωρα έτοιμοι να κατανοήσουμε τον τύπο (3.3). Έστω (x_0, y_0) ένα (τυχαίο) σταθεροποιημένο σημείο και (x,y) μεταβαλλόμενο σημείο, παίρνουμε μια ομαλή καμπύλη l που συνδέει αυτά τα δυο σημεία και ολοκληρώνοντας την (3.1) έχουμε

$$0 = \int_l M dx + N dy = \int_l \nabla u \cdot ds.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

$$\int_l \nabla u \cdot ds = u(x, y) - u(x_0, y_0),$$

συνεπώς

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \ \ \forall\, (x, y)$$

άρα (3.1) συνεπάγεται (3.3).

Έστω σε κάποιο σημείο $u_y \neq 0$, τότε την (3.3) μπορούμε να την λύσουμε (τοπικά) ως προς y δηλαδη να την γράψουμε ως συνάρτηση $y = y(x)$ αρα $u(x, y(x)) = C$. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση (ως προς x) παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)) = u_x + u_y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Αν σε κάποιο σημείο $u_x \neq 0$, τότε την (3.3) μπορούμε να την λύσουμε (τοπικά) ως προς x δηλαδη $x = x(y)$ αρα $u(x(y), y) = C$ και συνεπώς

$$\frac{d}{dy}u(x(y), y) = u_x \frac{dx}{dy} + u_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(x, y)\frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0.$$

Αν σε κάποιο σημείο $u_x = u_y = 0$, τότε προφανώς η (3.3) ισχύει (σε αυτό το σημείο).

Καταλήξαμε στο οτι (3.1) $\Leftrightarrow$ (3.3).

Παράδειγμα 3.1. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Λύση. Προφανώς

$$\frac{\partial(x + y + 1)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x}$$

άρα η εξίσωση είναι πλήρης. Ψάχνουμε τώρα την u. Έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x + y + 1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + h(y)$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dh}{dy}.$$

Απο την άλλη

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x - y^2 + 3,$$

άρα

$$x + \frac{dh}{dy} = x - y^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad h(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + \tilde{C}$$

και

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + \tilde{C}.$$

Η ζητούμενη λύση (σε πεπλεγμένη μορφή) είναι

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, τότε η σταθερά C προσδιορίζεται απο την σχέση

$$3x_0^2 + 6x_0y_0 + 6x_0 - 2y_0^3 + 18y_0 = C.$$

Π.χ. αν $y(0) = 0$, τότε $C = 0$.

Παρατήρηση 1. Αν η $u(x, y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η παράσταση

$$u_x dx + u_y dy$$

ονομάζεται πλήρες διαφορικό της u και συμβολίζεται du. Αν οι συναρτήσεις M και N επαληθεύουν τη σχέση (3.2) τότε η παράσταση

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

είναι το πλήρες διαφορικό της u εδώ οφείλεται το όνομα πλήρεις εξισώσεις, επιπλέον ισχύει

$$du = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \equiv C.$$

Έστω τώρα η εξίσωση (3.1) δεν είναι πλήρης. Αν υπάρχει $\mu(x, y) \geq 0$ τ.ω. η εξίσωση

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{3.6}$$

είναι πλήρης, τότε η $\mu(x, y)$ ονομάζεται <u>*ολοκληρωτικός παράγοντας*</u>.

Το ερώτημα είναι πότε υπάρχει τέτοια συνάρτηση μ και αν υπάρχει πως μπορούμε να την προσδιορίσουμε ; Για να είναι η (3.6) πλήρης πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{3.7}$$

Η εξίσωση (3.7) είναι εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης που εν γένει είναι πιο πολύπλοκη από την (3.1) (με τέτοιες εξισώσεις θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο), όμως σε κάποιες περιπτώσεις η (3.7) μπορεί να απλοποιηθεί ουσιαστικά. Π.χ. ας δούμε αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(x)$, δηλαδή η μ να εξαρτάται μονο απο την μεταβλητή x. Σε αυτήν την περίπτωση η (3.7) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{3.8}$$

Συνεπώς για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που να εξαρτάται μόνο απο την μεταβλητή x, πρέπει η συνάρτηση

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

να είναι συνάρτηση της μεταβλητής x **μόνο**. Έστω

$$\phi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}, \tag{3.9}$$

τότε, απο την (3.8) έχουμε

$$\mu(x)=Ce^{\int\phi(x)dx}.$$

Αφού θέλουμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση μ μπορούμε να πάρουμε

$$\mu(x)=e^{\int\phi(x)dx}\quad (\text{δηλαδή}\ \ C=1). \tag{3.10}$$

Παράδειγμα 3.2. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$(xy^3+\sin\,x+1)dx+x^2y^2\,dy=0. \tag{3.11}$$

Λύση. Η εξίσωση δεν είναι πλήρης αφού για $M=xy^3+\sin\,x+1$ και $N=x^2y^2$ έχουμε

$$\frac{\partial(xy^3+\sin\,x+1)}{\partial y}=3xy^2\neq 2xy^2=\frac{\partial(x^2y^2)}{\partial x}.$$

Επειδή όμως

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{xy^2}{x^2y^2}=\frac{1}{x}=\phi(x),$$

υπάρχει ολοκληρωτικός παράγων (βλ. (3.10)) $\mu=\mu(x)$:

$$\mu(x)=e^{\int\phi(x)dx}=|x|.$$

Άρα για να βρούμε τη λύση πολλαπλασιάζουμε την (3.11) με x ή $(-x)$:

$$(x^2y^3+x\sin\,x+x)dx+x^3y^2\,dy=0. \tag{3.12}$$

Η (3.12) είναι πλήρης. Προσδιορίζουμε την u:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3y^2\quad\Rightarrow\quad u(x,y)=\frac{1}{3}x^3y^3+h(x)$$

όπου $h(x)$ μια τυχαία (παραγωγίσιμη) συνάρτηση, για να την προσδιορίσουμε έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2y^3+\frac{d\,h}{dx}$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2y^3+x\sin\,x+x,$$

άρα

$$\frac{d\,h}{dx}=x\sin\,x+x\quad\Rightarrow\quad h(x)=-x\cos\,x+\sin\,x+\frac{x^2}{2}.$$

Συνεπώς

$$u = \frac{1}{3}x^3y^3 - x\cos x + \sin x + \frac{x^2}{2}$$

και η λύση δίνεται απο την σχέση

$$x^3y^3 - 3x\cos x + 3\sin x + \frac{3x^2}{2} = C$$

ή

$$y(x) = \frac{1}{x}\Big(C + 3x\cos x - 3\sin x - \frac{3x^2}{2}\Big)^{1/3}.$$

Θα δούμε τώρα την πιο γενική περίπτωση. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνθήκη η οποία θα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής

$$\mu = \mu(z), \quad z = z(x, y)$$

όπου z είναι μια τυχαία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση των x, y. Σε αυτήν την περίπτωση η (3.7) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{d\ln\mu(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}M - \frac{d\ln\mu(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{d\ln\mu(z)}{dz} = \frac{N_x - M_y}{z_yM - z_xN}$$

εδώ

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad M_y = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Άρα για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(z)$, πρέπει η σχέση

$$\frac{N_x - M_y}{z_yM - z_xN}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z και σε αυτήν την περίπτωση ο ολοκληρωτηκός παράγοντας προσδιορίζεται απο τον τύπο

$$\mu(z) = e^{\int \phi(z)dz}$$

όπου

$$\phi(z) = \frac{N_x - M_y}{z_yM - z_xN}. \tag{3.13}$$

Αν στην (3.13) θα πάρουμε $z = x$, τότε η (3.13) θα γίνει (3.9).

Παράδειγμα 3.3. Ποια συνθήκη πρέπει να επαληθεύουν οι $M(x, y)$ και $N(x, y)$ για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής
$i)$ $\mu = \mu(x - y)$, $\quad ii)$ $\mu = \mu(\frac{x}{y})$.

Λύση. ι.) Αφού $z_x = 1$, $z_y = -1$, ακολουθώντας την διαδικασία καταλήγουμε στο εξής: για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(x - y)$ πρέπει η συνάρτηση (βλ. (3.13))

$$\frac{M_y - N_x}{M + N}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής $x-y$. Π.χ. για

$$M(x,y)=\frac{y-x}{2}+\frac{(y-x)^3}{6},\quad N(x,y)=\frac{x-y}{2}+\frac{(y-x)^3}{6}$$

έχουμε

$$\frac{M_y-N_x}{N+M}=\frac{3}{y-x}\quad\big(\phi(z)=\frac{3}{z}\ \text{ με }\ z=x-y\big).$$

ιι.) Αφού $z_x=1/y$, $z_y=-x/y^2$, ακολουθώντας την διαδικασία καταλήγουμε στο εξής: για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu=\mu(x/y)$ πρέπει η συνάρτηση

$$\frac{y^2(M_y-N_x)}{xM+yN}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x/y.

Π.χ. για $M(x,y)=x+y$, $N(x,y)=-x$ έχουμε

$$\frac{y^2(M_y-N_x)}{xM+yN}=2\big(\frac{y}{x}\big)^2\quad\big(\phi(z)=2\frac{1}{z^2}\ \text{ με }\ z=\frac{x}{y}\big).$$

Ασκήσεις.

Προσδιορίστε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων και έπειτα να βρείτε τη λύση του προβλήματος *Cauchy*:

1. $$(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0,\quad y(0)=1.$$

2. $$\cos y dx+(y^2-x\sin y)dy=0,\quad y(-1)=1.$$

3. $$(xy+y^2+y)dx+(x^2+3xy+2x)dy=0.$$

Υπόδειξη: εξετάστε αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(y)$.

4. Εξετάστε αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu=\mu(x+y^2)$ για την εξίσωση

$$(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0.$$

5. Ποια συνθήκη πρέπει να επαληθεύουν οι $M(x,y)$, $N(x,y)$ για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

α) $$\mu=\mu(x^2+y^2),$$

β) $$\mu=\mu(y/x).$$

6. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση σε μορφή

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$$

επειτα προσδιορίστε τον ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu=\mu(x^2+y^2)$.

§4. Γραμμικές εξισώσεις ανώτερης τάξεως

Θα ασχοληθούμε σε αυτήν την παράγραφο με ομογενείς γραμμικές εξισώσεις n τάξης σε κανονική μορφή, δηλαδή με εξισώσεις

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{4.1}$$

(υπενθυμίζουμε οτι με $y^{(k)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο k τάξης). Θα υποθέτουμε πάντα ότι οι συναρτήσεις $p_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ είναι πραγματικές και συνεχείς στο διάστημα που λύνουμε την εξίσωση. Στο πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα $Cauchy$) χρειαζόμαστε n αρχικές συνθήκες:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_{01}, \;\; ..., \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{0\,n-1} \tag{4.2}$$

όπου $y_0, y_{01}, ..., y_{0\,n-1}$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Συμβολίζοντας με

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

μπορούμε να γράψουμε την (4.1) ως

$$L[y] = 0.$$

Το L ονομάζεται γραμμικός τελεστής. Ας δουμε δυο βασικές ιδιότητες του γραμμικού τελεστή L:

(A)

$$L[Cy] \equiv CL[y]$$

(εδώ η αυθαίρετη σταθερα C μπορεί να είναι και μιγαδική).

Πράγματι

$$L[Cy] \equiv (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)(Cy)' + p_n(x)(Cy) \equiv$$
$$C\big[y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y\big] \equiv CL[y].$$

□

(B)

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2]$$

Πράγματι

$$L[y_1 + y_2] \equiv$$
$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) \equiv$$
$$\big[y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\big] +$$
$$\big[y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2\big]$$
$$\equiv L[y_1] + L[y_2].$$

□

Προφανώς απο τις **(A)** και **(B)** συνεπάγεται ότι

$$L\Big[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i].$$

Θεώρημα 4.1. *Αν οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (4.1) τότε και ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων, δηλαδή η συνάρτηση*

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

είναι επίσης λύση της (4.1).

Απόδειξη. Πράγματι, εφόσον

$$L[y_i] = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

έχουμε

$$L\Big[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[y] = 0.$$

□

Θεώρημα 4.2. *Αν μια μιγαδική συνάρτηση $y(x) = u(x) + iv(x)$ είναι λύση της εξίσωσης (4.1) τότε και το πραγματικό μέρος $u(x)$ και το φανταστικό μέρος $v(x)$ είναι λύσεις της (4.1).*

Απόδειξη. Έχουμε

$$0 = L[y] = L[u] + iL[v]$$

άρα

$$L[u] = 0 \ \text{ και } \ L[v] = 0$$

αφού μιγαδικός αριθμός ισούται με μηδέν σημαίνει ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του είναι μηδεν.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι $p_1(x), ..., p_n(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις.

□

Το επόμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα απο το θεωρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ (ή αρχικών τιμών) που αποδεικνύεται στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Θεώρημα 4.3. *Έστω οτι οι συναρτήσεις $p_1(x), ..., p_n(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ που περιέχει το x_0, τότε το πρόβλημα $(4.1), (4.2)$ έχει μοναδική λύση στο I.*

Ορισμός 1. *Λέμε ότι οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες στο διάστημα $[a, b]$ αν υπάρχουν σταθερές $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ τέτοιες ώστε*

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0 \ \ (\textit{το γράφουμε ως } \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0)$$

και για όλα τα $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \ \ (\text{το γράφουμε ως } \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0).$$

Ορισμός 2. *Λέμε ότι οι συναρτήσεις* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα* $[a, b]$ *αν απο την σχέση*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0 \text{ στο } [a, b]$$

προκύπτει ότι

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Παράδειγμα 4.1. Οι συναρτήσεις $1, x, x^2, ..., x^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάθε $[a, b]$.

Πράγματι, έστω

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n \equiv 0 \tag{4.3}$$

σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Αν τουλάχιστον κάποιο απο τα α_i είναι διάφορο του μηδενός τότε έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $m \leq n$ το οποίο έχει το πολύ m διαφορετικές ρίζες στο $[a, b]$ άρα η σχέση $\alpha_1 + \alpha_2 x + ... + \alpha_{n+1} x^n$ μπορεί να μηδενίζεται το πολύ σε n διαφορετικά σημεία. Συνεπώς απο την (4.3) έπεται ότι

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n+1} = 0.$$

Παράδειγμα 4.2. Οι συναρτήσεις $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$ με $k_i \neq k_j$ αν $i \neq j$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάθε $[a, b]$.

Πράγματι, έστω

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} + ... + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0 \tag{4.4}$$

σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει τουλάχιστον μια σταθερα, έστω η α_n, που είναι διάφορη του μηδενός. Διαιρούμε την (4.4) δια την $e^{k_1 x}$ και παραγωγίζουμε:

(4.5)
$$\alpha_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_1)x} + ... + \alpha_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} \equiv 0.$$

Διαιρούμε τώρα την (4.5) με $e^{(k_2-k_1)x}$ και πάλι παραγωγίζουμε:

$$\alpha_3(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)e^{(k_3-k_2)x} + ... + \alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)e^{(k_n-k_2)x} \equiv 0.$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε στη σχέση

$$\alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)...(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_2)x} \equiv 0.$$

Αφού

$$(k_n - k_1)(k_n - k_2)...(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_2)x} \neq 0$$

αναγκαστικά $\alpha_n = 0$. Άτοπο.

Παράδειγμα 4.3. Οι συναρτήσεις $x, -x, x^2$, είναι γραμμικώς εξαρτημένες σε κάθε $[a, b]$.

Πράγματι,

$$\alpha_1 x + \alpha_2(-x) + \alpha_3 x^2 \equiv 0 \ \ \forall x,$$

με $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$.

Ορισμός 3. *Βρονσκιανή ενός συστήματος συναρτήσεων $y_1(x), ..., y_n(x)$ ονομάζουμε την εξής ορίζουσα*

$$W(x) = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots\cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{Vmatrix}.$$

Θεώρημα 4.4. *Αν οι $n-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), ..., y_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες στο διάστημα $[a, b]$ τότε*

$$W(x) \equiv 0 \;\text{ στο }\; [a, b].$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0, \quad x \in [a, b] \tag{4.6}$$

όπου τουλάχιστον μια απο τις σταθερές α_1, ..., α_n είναι διάφορη του μηδενός. Αν θα παραγωγίσουμε την σχέση (4.6) μια φορά, δυο φορές, ..., $n-1$ φορές, πάλι θα έχουμε μηδέν, δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x) \; &+ \alpha_2 y_2(x) \; + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) \; &+ \alpha_2 y_2'(x) \; + ... + \alpha_n y_n'(x) \equiv 0 \\ &\;\;\;\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) &+ \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Προφανώς για κάθε x_0 απο το διάστημα $[a, b]$ το σύστημα (4.7) είναι αλγεβρικό σύστημα ως προς τα α_1, ..., α_n με **μη** μηδενική λύση (αφού τουλάχιστον μια απο τις σταθερές α_1, ..., α_n είναι διάφορη του μηδενός). Συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$W(x_0) = 0$$

και αφού το x_0 είναι τυχαίο συμπεραίνουμε οτι

$$W(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

□

Θεώρημα 4.5. *Αν οι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $[a, b]$ συναρτήσεις $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (4.1) (στο διάστημα $[a, b]$), τότε*

$$W(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

(Θυμίζουμε οτι οι $p_i(x)$, $i = 1, ..., n$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ συναρτήσεις.)

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a, b]$ η Βρονσκιανή μηδενίζεται

$$W(x_0) = 0$$

επιλέγουμε τέτοιες σταθερές α_1, α_2,..., α_n ώστε

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

$$(4.8) \qquad \cdots$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

και τουλάχιστον μια από τις σταθερές να είναι διάφορη του μηδενός.

Τούτο είναι εφικτό εφόσον η ορίζουσα τον πίνακα των συντελεστών είναι μηδέν ($W(x_0) = 0$). Η συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

είναι λύση της (4.1) (ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (4.1)). Απο (4.8) έχουμε

$$(4.9) \qquad \tilde{y}(x_0) = 0, \quad \tilde{y}'(x_0) = 0, ..., \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Προφανώς η $\tilde{y}$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (4.1), (4.9), απο την άλλη και η συνάρτηση ταυτοτικά ίση με το μηδέν είναι λύση του προβλήματος (4.1), (4.9), λαμβάνοντας υπ όψιν ότι το πρόβλημα (4.1), (4.9) εχει μόνο μια λύση (βλ. Θεώρημα 4.3) καταλήγουμε στο ότι $\tilde{y}(x) \equiv 0$ δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0$$

και συνεπώς οι $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Άτοπο. Άρα η Βρονσκιανή δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[a, b]$.

□

Θεώρημα 4.6. *Έστω οτι οι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $[a, b]$ συναρτήσεις $y_1(x), ..., y_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (4.1), τότε η γενική λύση της (4.1) (στο ίδιο διάστημα) είναι ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων, δηλαδή*

$$(4.10) \qquad y_{\gamma o}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

όπου C_i, $i = 1, ..., n$ αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι ο τύπος (4.10) περιέχει όλες τις λύσεις της εξίσωσης (4.1). Δηλαδή αν θα πάρουμε μια τυχαία λύση $\overline{y}(x)$ της (4.1), πρέπει να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_i έτσι ώστε η $\overline{y}(x)$ να γράφεται στη μορφή (4.10). Με $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ θα συμβολίσουμε τις τιμές της συνάρτησης $\overline{y}$ και τις παραγώγους μεχρι τάξεως $n-1$ σε ενα σημείο $x_0 \in (a, b)$ δηλαδή:

$$\alpha_0 = \overline{y}(x_0), \quad \alpha_1 = \overline{y}'(x_0), \quad ... \quad \alpha_{n-1} = \overline{y}^{n-1}(x_0).$$

Θεωρούμε το ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα (ως προς C_i):

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = \alpha_0,$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = \alpha_1,$$

$$(4.11) \qquad \cdots$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος (4.11) ισούται με την Βρονσκιανή $W(x_0)$, άρα είναι διάφορη του μηδενος, συνεπώς το σύστημα (4.11) έχει μοναδική λύση. Έστω $C_1^*, ..., C_n^*$ είναι η (μοναδική) λύση του (4.11). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^* y_i(x).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$ για την (4.1) με αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = \alpha_0, \;\; y'(x_0) = \alpha_1, \;\; \ldots \;\; y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

το ίδιο και η $\overline{y}(x)$, άρα από την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (Θεώρημα 4.3) προκύπτει οτι

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^* y_i(x).$$

□

Ορισμός 4. *Ένα σύστημα n γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων της (4.1) ονομάζεται θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (4.1).*

Παρατηρούμε ότι το Θεωρημα 4.6 ανάγει τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της εξίσωσης (4.1) στον προσδιορισμό του θεμελιώδους συστήματος λύσεων της (4.1)!

Στη γενική περίπτωση δεν υπάρχει αλγόριθμος που να μας οδηγεί στην εύρεση αυτών των λύσεων (όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο για εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές αυτο είναι μια εύκολη υπόθεση).

Αν με κάποιο τρόπο καταφέραμε να μαντέψουμε μια λύση της (4.1) τότε για να βρούμε τις υπόλοιπες $n-1$ μπορούμε να αναγάγουμε την εξίσωση (4.1) σε μια άλλη εξίσωση τάξης $n-1$. Θα περιοριστούμε με $n=2$, για $n>2$ η διαδικασία είναι παρόμοια. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \tag{4.12}$$

Έστω οτι η $\phi(x)$ είναι λύση της εξίσωσης, δηλαδη

$$\phi'' + p_1(x)\phi' + p_2(x)\phi = 0.$$

Ψάχνουμε μια άλλη λύση της (4.12) σε μορφή $z(x)\phi(x)$ δηλαδή θέλουμε

$$(z\phi)'' + p_1(z\phi)' + p_2(z\phi) = 0.$$

Προφανώς

$$(z\phi)'' + p_1(z\phi)' + p_2(z\phi) = \phi\, z'' + (2\phi' + p_1\phi)z' + z(\phi'' + p_1\phi' + p_2\phi) =$$

$$\phi\, z'' + (2\phi' + p_1\phi)z'.$$

Συνεπώς ο προσδιορισμός της z ανάγεται στον προσδιορισμό της $v = z'$ όπου

$$v' + \frac{2\phi' + p_1\phi}{\phi} v = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί ευκολα να λυθεί:

$$v(x) = e^{-\int \frac{2\phi' + p_1\phi}{\phi} dx},$$

άρα η συνάρτηση

$$\int v(x)dx\,\phi(x)$$

είναι λύση της (4.12). Συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$\phi(x), \quad \int v(x)dx\,\phi(x)$$

και η γενική λύση

$$y(x) = \phi(x)\Big(C_1 + C_2\int v(x)dx\Big).$$

Ασκήσεις.

1. Έχουμε σύστημα τριών συναρτήσεων

$$(x, \quad x^2+1, \quad h(x)).$$

Επιλέξτε τρείς συναρτήσεις $h(x)$ ετσι ώστε στο $[-1,1]$ το σύστημα να είναι

α.) γραμμικώς ανεξάρτητο,

β.) γραμμικώς εξαρτημένο.

2. Στο σύστημα τριών συναρτήσεων

$$(\sin x, \quad e^x, \quad h(x))$$

επιλέξτε τρείς συναρτήσεις $h(x)$ ετσι ώστε το σύστημα στο $[0,1]$ να είναι

α.) γραμμικώς ανεξάρτητο,

β.) γραμμικώς εξαρτημένο.

3. Αποδείξτε οτι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα $[a,b]$

α.) $$e^{kx}, \quad xe^{kx}, \quad x^2e^{kx}, ..., \quad x^m e^{kx},$$

β.) $$\sin\beta x, \quad \cos\beta x,$$

4. Μπορεί το θεμελιώδες σύστημα λύσεων μιας εξίσωσης βαθμού n να αποτελείται από

α.) $n-1$ συναρτήσεις;

β.) $n+1$ συναρτήσεις;

5. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + \sin x\, y' - (1+\sin x)\, y = 0$$

αφού διαπιστώσετε οτι η e^x είναι μερική λύση.

§5. Γραμμικές Εξισώσεις Με Σταθερούς Συντελεστές

Σε αυτήν την παράγραφο θα μάθουμε πως προσδιορίζουμε το θεμελιώδες σύστημα (δηλαδή τις n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις) μιας ομογενούς γραμμικής εξίσωσης n τάξεως με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή της

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \tag{5.1}$$

όπου $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, ..., n$ σταθερές. Ψάχνουμε τη λύση της (5.1) σε μορφή $y(x) = e^{kx}$, όπου k μπορεί να είναι και μιγαδικός αριθμός. Αντικαθιστώντας την συνάρτηση αυτή στην (5.1) έχουμε

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + ... + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0.$$

Διαιρώντας δια την e^{kx} παίρνουμε

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0.$$

Το πολυώνυμο

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n \tag{5.2}$$

ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο*. Προφανώς η συνάρτηση e^{kx} είναι (μερική) λύση της (5.1) αν και μόνο αν ο αριθμός k είναι ρίζα του χαρακτηριστηκού πολυωνύμου (5.2).

1. Ξεκινάμε με την απλούστερη περίπτωση όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες (n απλές πραγματικές ρίζες). Δηλαδή k_1, k_2,..., k_n ρίζες του (5.2) τ.ω. $k_i \neq k_j$ για $i \neq j$ και $k_i \in \mathbf{R}$ $\forall i = 1, ..., n$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (5.1)

$$e^{k_1 x}, \;\; e^{k_2 x}, \;\; ... \;\; e^{k_{n-1} x}, \;\; e^{k_n x},$$

οι οποίες αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (5.1). Άρα η γενική λύση της (5.1) σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από τον τύπο (βλ. Θεώρημα 4.6)

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_{n-1} e^{k_{n-1} x} + C_n e^{k_n x}.$$

όπου C_i, $i = 1, ..., n$ αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 5.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Λύση. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

είναι $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Παράδειγμα 5.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y''' - y' = 0.$$

Λύση. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$k^3 - k = 0$$

είναι $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1$, συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}.$$

2. Θα δούμε τώρα τι κάνουμε εις την περίπτωση που κάποια ρίζα, έστω η k_1, δεν είναι απλή. Έστω έχει πολλαπλότητα $m \le n$. Πρέπει να προσδιορίσουμε m γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν σε αυτή την ρίζα.

$\underline{\alpha.}$ Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $k_1 = 0$.

Η εξίσωση (5.1) θα πάρει τη μορφή

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-m} y^{(m)} = 0 \tag{5.3}$$

εφόσον το πολυώνυμο που έχει μηδενική ρίζα πολλαπλότητας m πρέπει να έχει τη μορφή

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-m} k^m.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$1, \ \ x, \ \ x^2, \ \ ..., \ \ x^{m-1}$$

είναι λύσεις της (5.3). Συνεπώς βρήκαμε m γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στη μηδενική ρίζα πολλαπλότητας m.

$\underline{\beta.}$ Έστω τώρα έχουμε μια πραγματική ρίζα $k_1 \ne 0$ πολλαπλότητας m. Κάνουμε την εξής αντικατάσταση, εισάγουμε την συνάρτηση

$$z(x) = e^{-k_1 x} y(x) \ \text{ ή } \ y(x) = e^{k_1 x} z(x). \tag{5.4}$$

$\underline{\beta_1.}$ Για να καταλάβουμε καλλίτερα την ιδέα ας πάρουμε πρώτα $n = 2$, δηλαδή θεωρούμε την εξίσωση

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{5.5}$$

και υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $k^2 + a_1 k + a_2$ έχει διπλή ρίζα $k_1 \ne 0$. Κάνοντας την αντικατάσταση (5.4) έχουμε

$$y' = e^{k_1 x} z' + k_1 e^{k_1 x} z,$$

$$y'' = e^{k_1 x} z'' + 2k_1 e^{k_1 x} z' + k_1^2 e^{k_1 x} z,$$

άρα η εξίσωση που επαληθεύει η z είναι η

$$z'' + (2k_1 + a_1) z' + (k_1^2 + a_1 k_1 + a_2) z = 0 \quad \Rightarrow z'' = 0$$

εφόσον η k_1 είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $k^2 + a_1 k + a_2$. Οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της $z'' = 0$ είναι οι 1 και x, άρα οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.5) είναι οι

$$e^{k_1 x}, \ \ x\, e^{k_1 x}.$$

$\underline{\beta_2.}$ Έστω τώρα $n = 3$:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \tag{5.6}$$

και η k_1 διπλή ή τριπλή ρίζα του πολυωνύμου $k^3+a_1k^2+a_2k+a_3$. Κάνοντας την αντικατάσταση (5.4) έχουμε

$$y' = e^{k_1x}z' + k_1e^{k_1x}z,$$
$$y'' = e^{k_1x}z'' + 2k_1e^{k_1x}z' + k_1^2e^{k_1x}z,$$
$$y''' = e^{k_1x}z''' + 3k_1e^{k_1x}z'' + 3k_1^2e^{k_1x}z' + k_1^3e^{k_1x}z,$$

άρα η εξίσωση που επαληθεύει η z είναι η

$$z'''+(3k_1+a_1)z''+(3k_1^2+2a_1k_1+a_2)z'+(k_1^3+a_1k_1^2+a_2k_1+a_3)z = 0. \tag{5.7}$$

Αν η k_1 είναι διπλή ρίζα τοτε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$z''' + (3k_1 + a_1)z'' = 0,$$

οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.7) είναι οι 1, x και συνεπώς οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.6) είναι οι

$$e^{k_1x}, \ \ x\,e^{k_1x}.$$

Αν η k_1 είναι τριπλή ρίζα τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$z''' = 0,$$

και οι τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.7) είναι οι 1, x, x^2 και συνεπώς οι τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.6) είναι οι

$$e^{k_1x}, \ \ x\,e^{k_1x}, \ \ x^2e^{k_1x}.$$

$\underline{\beta_3}$. Έστω τώρα $n > 3$. Δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε (κάνοντας παρόμοια διαδικασία) ότι οι m γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.1) που αντιστοιχούν στη μη μηδενική πραγματική ρίζα k_1 πολλαπλότητας $m \leq n$ είναι οι

$$e^{k_1x}, \ \ x\,e^{k_1x}, \ \ \ldots \ \ , x^{m-1}e^{k_1x}. \tag{5.8}$$

Παρατηρούμε οτι ο τυπος (5.8) περιεχει και την περίπτωση μηδενικής ρίζας πολλαπλότητας m.

Παράδειγμα 5.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Λύση. Προφανώς

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = (k-1)^3$$

άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τριπλή ριζα $k_{1,2,3} = 1$, συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$e^x, \ \ xe^x, \ \ x^2e^x$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x.$$

3. Περνάμε τωρα στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες. Θα ξεκινήσουμε με απλές μιγαδικές ρίζες. Έστω $k_1 = \alpha + i\beta$ (απλή) ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε και η $\overline{k}_1 = \alpha - i\beta$ είναι επίσης (απλή) ρίζα (εδώ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). Οι λύσεις που αντιστοιχούν σε αυτές τις δυο ρίζες είναι $e^{(\alpha+i\beta)x}$ και $e^{(\alpha-i\beta)x}$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $Euler$

$$e^{iz} = \cos\, z + i \sin\, z,$$

έχουμε

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Όπως είχαμε διαπιστώσει αν έχουμε μια μιγαδική λύση της εξίσωσης (5.1) τότε και το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι επίσης λύσεις, συνεπώς οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στις ρίζες $\alpha \pm i\beta$ είναι οι

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Παράδειγμα 5.4 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = 0.$$

Λύση. Προφανώς οι ρίζες του

$$k^2 + 1 = 0$$

είναι i και $-i$ ($\alpha = 0, \beta = 1$), συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα αποτελείται απο

$$\cos\, x, \quad \sin\, x$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x.$$

4. Θα εξετάσουμε την περίπτωση πολλαπλών μιγαδικών ριζών. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μιγαδική ρίζα $k_1 = \alpha + i\beta$ πολλαπλότητας $m \leq n/2$. Πρέπει να βρούμε $2m$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στις ρίζες $k_1, \overline{k}_1$ (δηλαδή $\alpha \pm i\beta$). Ακολουθώντας την διαδικασία της περίπτωσης 2 (βλ. (5.8)), και λαμβάνοντας υπ όψιν τον τύπο $Euler$ καταλήγουμε στο ότι οι ζητούμενες λύσεις είναι οι εξής:

$$e^{\alpha x} \cos\, \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos\, \beta x, \quad ..., \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \cos\, \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin\, \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin\, \beta x, \quad ..., \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \sin\, \beta x.$$

Το σύστημα αυτο ειναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παράδειγμα 5.5 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Λύση. Προφανώς οι i και $-i$ είναι δύο διπλές ρίζες του

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$\cos\, x, \quad \sin\, x, \quad x \cos\, x, \quad x \sin\, x$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) \cos\, x + (C_3 + C_4 x) \sin\, x.$$

Θα μελετήσουμε τώρα μια εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές η οποία εύκολα ανάγεται σε εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Εξίσωση Euler

Η εξίσωση της μορφής

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad x > 0$$

ονομάζεται εξίσωση $Euler$ και ανάγεται σε εξίσωση με σταθερούς συντελεστές με αλλαγή μεταβλητής

$$x = e^t \quad (x(t) = e^t).$$

Αν μελετάμε την εξίσωση για $x < 0$, τότε η αντικατάσταση που κάνουμε είναι $x = -e^t$.

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα περιοριστούμε με την περίπτωση $n = 2$. Έχουμε

$$x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_2 y(x) = 0 \tag{5.9}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παραγωγίζουμε την ταυτότητα

$$y(t) \equiv y(x(t))$$

ως προς t:

$$y'(t) \equiv y'(x)\frac{dx}{dt} \equiv y'(x)x,$$

παραγωγίζουμε άλλη μια φορα ως προς t:

$$y''(t) \equiv y''(x)\frac{dx}{dt}x + y'(x)\frac{dx}{dt} \equiv y''(x)x^2 + y'(x)x. \tag{5.10}$$

Άρα

$$a_1 x y'(x) \equiv a_1 y'(t), \quad x^2 y''(x) \equiv y''(t) - y'(x)x \equiv y''(t) - y'(t)$$

και η (5.9) παίρνει τη μορφή

$$y''(t) + (a_1 - 1)y'(t) + a_2 y(t) = 0.$$

Παράδειγμα 5.6 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$x^2 y''(x) + \frac{5}{2} x y'(x) - y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = e^t$ και έχουμε

$$y''(t) + \frac{3}{2} y'(t) - y(t) = 0.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0$$

έχει ρίζες $k_1 = 1/2$, $k_2 = -2$ άρα η γενική λύση είναι

$$y(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-2t}.$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $t = \ln x$ για $x > 0$, παίρνουμε ότι

$$y(x) = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$, αντιμετωπίζεται και η περίπτωση $n > 2$. Π.χ. για $n = 3$ έχουμε

$$x^3 y'''(x) + a_1 x^2 y''(x) + a_2 x y'(x) + a_3 y(x) = 0. \tag{5.11}$$

Παραγωγίζουμε την (5.10) ως προς t:

$$y'''(t) \equiv \frac{d}{dt}(y''(x)x^2 + y'(x)x) =$$
$$y'''(x)\frac{dx}{dt}x^2 + y''(x)2x\frac{dx}{dt} + y''(x)\frac{dx}{dt}\,x + y'(x)\frac{dx}{dt} =$$
$$x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) + x y'(x).$$

Αρα

$$x^3 y'''(x) = y'''(t) - 3x^2 y''(x) - x y'(x) =$$
$$y'''(t) - 3(y''(t) - y'(t)) - y'(t) =$$
$$y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t).$$

Συνεπώς η (5.11) γράφεται ως

$$y'''(t) + (a_1 - 3)y''(t) + (2 - a_1 + a_2)y'(t) + a_3 y(t) = 0$$

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η γενική λύση $y(x)$ της εξίσωσης

1.
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

2.
$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

3.
$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

4.
$$y'' + 4y = 0.$$

5.
$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$$

6.
$$x^2 y'' - x y' + y = 0, \quad x > 0.$$

7.
$$y^{(8)} - y = 0.$$

8.
$$x^2 y''(x) + \frac{5}{2} x y'(x) - y(x) = 0 \text{ για } x < 0.$$

§6. Μη Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{6.1}$$

την οποία, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό απο την προηγούμενη παράγραφο την γράφουμε ως

$$L[y] = f(x).$$

Όπως και πριν υποθέτουμε ότι οι συντελεστές $p_i(x)$, $i = 1, ..., n$ και το δεύτερο μέρος $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα όπου μελετάμε την εξίσωση. Από τις ιδιότητες $(\mathbf{A})$ και $(\mathbf{B})$ του τελεστή L (βλ. σελίδα 31) αμέσως προκύπτει ότι:

$(\mathbf{\Gamma})$ Αν η $\tilde{y}(x)$ είναι λύση της (4.1) και η $y_1(x)$ - λύση της (6.1), τότε η $y(x) = \tilde{y}(x) + y_1(x)$ είναι λύση της (6.1).

Πράγματι

$$L[y] = L[\tilde{y}] + L[y_1] = 0 + f(x) = f(x).$$

□

$(\mathbf{\Delta})$ Αν η $y_i(x)$ είναι λύση της $L[y_i] = f_i(x)$, $i = 1, ..., m$, τότε η

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

είναι λύση της

$$L[y] = \sum_{i=1}^{m} C_i f_i(x),$$

όπου οι C_i όπως πάντα αυθαίρετες σταθερές.

Πράγματι

$$L[y] = L[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} L[C_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i f_i.$$

□

$(\mathbf{E})$ Αν η συνάρτηση $y(x) = u(x) + iv(x)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$L[y] = g(x) + ih(x),$$

τότε

$$L[u] = g(x), \quad L[v] = h(x)$$

(οι συντελεστές p_i είναι πραγματικές συναρτήσεις)

Πράγματι,

$$L[y] = L[u + iv] = L[u] + iL[v] = g(x) + ih(x)$$

άρα

$$L[u] = g(x), \quad L[v] = h(x).$$

□

Θεώρημα 6.1 *Η γενική λύση της (6.1) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της (4.1) και της μερικής λύσης της (6.1).*

Παρατήρηση 1. Το θεώρημα ανάγει τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της (6.1) στον προσδιορισμό του θεμελιώδους συστήματος της (4.1) και της μερικής λύσης της (6.1).

Απόδειξη (του Θεωρήματος 6.1) Παρομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.6 πρέπει να αποδείξουμε ότι η λύση $\bar{y}(x)$ του προβλήματος αρχικών τιμών για την (6.1) με τυχαίες αρχικές συνθήκες

$$\bar{y}(x_0) = \alpha_0, \;\; \bar{y}'(x_0) = \alpha_1, \;\; ..., \;\; \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \tag{6.2}$$

για τυχαίο $x_0 \in [a, b]$, μπορεί να γραφτεί (με κατάλληλες σταθερές C_i) σε μορφή

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_\mu(x) \tag{6.3}$$

όπου $y_1, ..., y_n$ θεμελιώδες σύστημα της (4.1), και y_μ μερική λύση της (6.1). Δηλαδή έχοντας το θεμελιώδες σύστημα, τη μερική λύση και τις συνθήκες (6.2) θέλουμε να προσδιορίσουμε (μονοσήμαντα) τις σταθερές έτσι ώστε η (6.3) να είναι λύση του προβλήματος (6.1), (6.2).
Οι σταθερές C_i προσδιορίζονται μονοσήμαντα από το αλγεβρικό σύστημα

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = \alpha_0 - y_\mu(x_0),$$
$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x_0) = \alpha_1 - y_\mu'(x_0),$$
$$\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot$$
$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} - y_\mu^{(n-1)}(x_0),$$

εφόσον η ορίζουσα του πίνακα ισούται με $W(x_0) \neq 0$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη παρομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.
□

Παράδειγμα 6.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - y = x \tag{6.4}$$

Λύση. Για να προσδιορίσουμε το θεμελιώδες σύστημα ($\theta.\sigma.$) λύσεων της

$$y'' - y = 0$$

κατασκευάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρίσκουμε τις ρίζες:

$$k^2 - 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k_1 = 1, \;\; k_2 = -1.$$

Συνεπώς το $\theta.\sigma.$ αποτελείται από e^x και e^{-x}. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $y_\mu(x) = -x$ είναι μερική λύση της (6.4), άρα η γενική λύση της (6.4) είναι η

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \tag{6.5}$$

τότε έχουμε

$$0 = y(0) = C_1 + C_2 - 0, \quad 1 = y'(0) = C_1 - C_2 - 1$$

άρα $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ και η λύση του προβλήματος (6.4), (6.5) είναι

$$y(x) = e^x + e^{-x} - x.$$

Προφανώς δεν είναι πάντα τόσο εύκολο να μαντέψουμε τη μερική λύση μιας μη ομογενούς εξίσωσης όπως το κάναμε στο παράδειγμα 6.1, για αυτό θα αναπτύξουμε μια μέθοδο προσδιορισμού μερικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης βάσει της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς. Στην περίπτωση εξίσωσης πρώτης τάξης αυτό το έχουμε κάνει (βλ. §2. σελ. 20).

Μέθοδος Μεταβαλλόμενων Σταθερών

Ας ξεκινήσουμε με $n = 2$. Ψάχνουμε τη μερική λύση της

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad \Big(L[y] = f(x)\Big) \tag{6.6}$$

σε μορφή

$$y_\mu(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{6.7}$$

όπου y_1, y_2 είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad \Big(L[y] = 0\Big). \tag{6.8}$$

Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $c_i(x)$ έτσι ώστε η (6.7) να είναι λύση της (6.6). Προφανώς

$$y'_\mu(x) = c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x),$$

Ας υποθέσουμε οτι οι $c_i(x)$ είναι τέτοιες ώστε

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0,$$

τότε

$$y'_\mu(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x)$$

και

$$y''_\mu(x) = c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + c_1(x)y''_1(x) + c_2(x)y''_2(x).$$

Άρα έχουμε

$$\begin{gathered} f(x) = L[y_\mu] = \\ c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2 + p_1(x)\big(c_1y'_1 + c_2y'_2\big) + p_2(x)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big) = \\ c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = c'_1y'_1 + c'_2y'_2. \end{gathered}$$

Συνεπώς για να επαληθεύσουμε την (6.6) πρέπει να ισχύει

$$\begin{gathered} c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0, \\ c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{gathered} \tag{6.9}$$

Εφόσον η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος (6.9) είναι η Βρονσκιανή του θεμελιώδους συστήματος της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης καταλήγουμε στο ότι το σύστημα (6.9) έχει μοναδική λύση και έτσι προσδιορίζουμε τις $c'_i(x)$ και έπειτα τις $c_i(x)$, $i = 1, 2$.

Παράδειγμα 6.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \tag{6.10}$$

Λύση. Για να προσδιορίσουμε το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της $y'' + y = 0$ κατασκευάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρίσκουμε τις ρίζες:

$$k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = i, \quad k_2 = -i.$$

Συνεπώς το $\theta.\,\sigma.$ αποτελείται απο $\cos x$ και $\sin x$.

Ψάχνουμε τώρα τη μερική λύση της (6.10) σε μορφή

$$y_\mu(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x. \tag{6.11}$$

Έχουμε (βλ. (6.9))

$$c_1'(x)\cos x + c_2'\sin x = 0,$$
$$-c_1'(x)\sin x + c_2'\cos x = \frac{1}{\cos x},$$

άρα

$$c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_2'(x) = 1,$$

Δηλαδή

$$c_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1, \quad c_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

Αφού ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε μερική (κάποια) λύση μπορούμε να πάρουμε $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$. Συνεπώς η μερική λύση της (6.10) είναι

$$y_\mu(x) = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

και η γενική λύση της (6.10) είναι η

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x.$$

Αν τωρα ψάχνουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

τότε

$$0 = y(0) = C_1, \quad 1 = y'(0) = C_2$$

και η λύση θα είναι

$$y(x) = \cos x\ln|\cos x| + x\sin x.$$

Παράδειγμα 6.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = f(x) \quad x \in [a, b] \tag{6.12}$$

Λύση. Το $\theta.\,\sigma.$ αποτελείται απο $\cos x$ και $\sin x$. Πάλι ψάχνουμε τη μερική λύση της (6.12) σε μορφή (6.11). Έχουμε

$$c_1'(x)\cos x + c_2'\sin x = 0,$$
$$-c_1'(x)\sin x + c_2'\cos x = f(x),$$

συνεπώς

$$c_1'(x) = -f(x)\sin x \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = -\int_0^x f(\xi)\sin\xi\,d\xi,$$

$$c_2'(x) = f(x)\cos\, x \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = \int_0^x f(\xi)\cos\xi\, d\xi.$$

Άρα έχούμε ότι η γενική λύση της (6.11) ισούται με

$$y(x) = \int_0^x f(\xi)\big[\cos\,\xi \sin\, x - \sin\,\xi \cos\, x\big] d\xi + C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x =$$

$$\int_0^x f(\xi) \sin\,(x-\xi) d\xi + C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x.$$

Εστω τώρα $n > 2$. Ψάχνουμε τη μερική λύση της (6.1) σε μορφή

$$y_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x) \tag{6.13}$$

όπου y_1,... y_n είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (4.1). Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $c_i(x)$ έτσι ώστε η (6.13) να είναι λύση της (6.1). Προφανώς

$$y_\mu'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x),$$

Ας υποθέσουμε οτι οι $c_i(x)$, $i = 1, ..., n$ είναι τέτοιες ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0,$$

τότε

$$y_\mu'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x) \quad \text{και} \quad y_\mu''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x).$$

Θα βάλουμε έναν ακόμα περιορισμό στις $c_i(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0,$$

τότε

$$y_\mu''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x)$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία απαιτώντας

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(m)}(x) = 0, \tag{6.14}$$

για $m = 0, 1, ..., n-2$ (όχι για $m = n-1$), φτάνουμε στην

$$y_\mu^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)}(x)$$

Τέλος

$$y_\mu^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)$$

Αντικαθιστώντας την (6.13) στην (6.1) και λαμβάνοντας υπ όψιν τις (6.14) καταλήγουμε στην

$$f(x) = L[y_\mu] = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)} +$$

$$p_1 \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)} + p_2 \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-2)} + ... + p_{n-1} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i' + p_n \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \equiv$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i\, L[y_i] = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)}.$$

Συνεπώς για να επαληθεύσουμε την (6.1) πρέπει να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x). \tag{6.15}$$

Συνοψίζοντας συμπεραίνουμε ότι οι $c_i(x)$ πρέπει να επαληθεύουν τις (6.14),(6.15). Εφόσον η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος (6.14), (6.15) είναι η Βρονσκιανή του θεμελιώδους συστήματος της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης καταλήγουμε στο ότι το σύστημα (6.14), (6.15) έχει μοναδική λύση και έτσι προσδιορίζουμε τις $c_i'(x)$ και έπειτα τις $c_i(x)$, $i = 1, ..., n$.

Παρατηρούμε ότι ο προσδιορισμός της γενικής λύσης της (6.1) ουσιαστικά ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του θεμελιώδους συστήματος της (4.1), εφόσον το θεμελιώδες σύστημα μας δίνει και τη γενική λύση της (4.1) (γραμμικός συνδυασμός) αλλά και τη μερική λύση της (6.1) (μεταβαλλόμενες σταθερές).

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η γενική λύση $y(x)$ της εξίσωσης χρησιμοποιώντας την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών.

1.

$$y'' - y = x.$$

2.

$$y'' + y = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

3.

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1.$$

4.

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

5.

$$y'' + 4y = f(x) \;\text{ οπου }\; f(x) \;\text{ τυχαία συνεχής συνάρτηση.}$$

§7. Μη Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις Με Σταθερούς Συντελεστές

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = f(x).$$

Θα προτείνουμε μια άλλη μέθοδο προσδιορισμού της μερικής λύσης χωρίς την χρήση του θεμελιώδους συστήματος. Το πλεονέκτημα είναι ότι σε κάποιες περιπτώσεις η μέθοδος αυτή είναι πιο απλή σε σχέση με την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών, το μειονέκτημα είναι ότι εφαρμόζεται μόνο για εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και δεύτερο μέρος συγκεκριμένης μορφής.

Μέθοδος των προσδιοριζόμενων συντελεστών

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση η $f(x)$ να είναι πολυώνυμο βαθμού s.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y =$$

$$A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1}x + A_s \tag{7.1}$$

όπου $A_0 \neq 0, \;\; A_1, \;\; ..., \;\; A_{s-1}, \;\; A_s$ δοσμένες σταθερές. Έστω $a_n \neq 0$, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπαρχει μερική λύση της μορφής

$$B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s. \tag{7.2}$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές $B_0, \;\; B_1, \;\; ..., \;\; B_{s-1}, \;\; B_s$ αντικαθιστούμε την (7.2) στην εξίσωση (7.1). Εφόσον $a_n \neq 0$, απο τις σχέσεις

$$a_n B_0 x^s = A_0 x^s,$$

$$[a_n B_1 + s a_{n-1} B_0] x^{s-1} = A_1 x^{s-1},$$

$$[a_n B_2 + (s-1) a_{n-1} B_1 + s(s-1) a_{n-2} B_0] x^{s-2} = A_2 x^{s-2},$$

$$. \;\; . \;\; .$$

$$a_n B_s + ... = A_s,$$

ευκολα προσδιορίζουμε τους συντελεστές $B_0, ..., B_s$.

Προσοχή! Ακόμα και αν κάποια (ή όλα) απο τα $A_1, \, A_2, \, ... \;\, A_s$ είναι μηδέν τη μερική λύση την ψάχνουμε σε μορφή (7.2).

Παράδειγμα 7.1 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y^{(4)} + y' + y = x^2 + 3x.$$

Λύση. Ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$y_\mu = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$2B_0 x + B_1 + B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = x^2 + 3x,$$

άρα $B_0 = 1, \;\; 2B_0 + B_1 = 3, \;\; B_1 + B_2 = 0$. Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = x^2 + x - 1.$$

Έστω τώρα

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-m+1} = 0$$

για κάποιο $m < n$ και $a_{n-m} \neq 0$. Η (7.1) θα πάρει τη μορφή

(7.3) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-m} y^{(m)} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s.$

Για την συνάρτηση $z = y^{(m)}$ έχουμε

(7.4) $z^{(n-m)} + a_1 z^{(n-m-1)} + ... + a_{n-m} z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s,$

άρα υπάρχει μερική λύση της (7.4) της μορφής

$$B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_{s-1} x + B_s.$$

Για να παρουμε την y ολοκληρώνουμε την z m φορές, συνεπώς η (7.3) έχει μερική λύση της μορφής

$$x^m \big(\tilde{B}_0 x^s + \tilde{B}_1 x^{s-1} + ... + \tilde{B}_{s-1} x + \tilde{B}_s \big).$$

Παράδειγμα 7.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y' = x - 2.$$

Λύση. Ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$y(x) = x\big(B_0 x + B_1\big).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$2B_0 + 2B_0 x + B_1 = x - 2 \ \text{ άρα } \ B_0 = 1/2, \quad B_1 = -3.$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 3x.$$

Θεωρούμε τώρα μια πιο γενική περίπτωση

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y =$$

(7.5) $$e^{\lambda x} \big(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s \big)$$

όπου οι αριθμοί $\lambda, A_0, ..., A_s$ εν γένει μπορούν να είναι και μιγαδικοί. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα πάρουμε την περίπτωση $n = 2$:

(7.6) $$y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\lambda x} \big(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s \big).$$

Η αντικατάσταση

$$y(x) = e^{\lambda x} z(x)$$

ανάγει την (7.6) στην (7.1). Πράγματι

$$y' = e^{\lambda x} z' + \lambda e^{\lambda x} z, \quad y'' = e^{\lambda x} z'' + 2\lambda e^{\lambda x} z' + \lambda^2 e^{\lambda x} z,$$

άρα η (7.6) παίρνει τη μορφη

$$z'' + (2\lambda + a_1) z' + (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s.$$

Έχουμε την προηγούμενη περίπτωση. Συνεπώς αν ο αριθμός λ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \neq 0$, τότε ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_{s-1} x + B_s,$$

αν είναι απλή ρίζα ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, $2\lambda + a_1 \neq 0$), τότε ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$x\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s\big),$$

αν είναι διπλή ρίζα ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 2\lambda + a_1 = 0$), τότε ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$x^2\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s\big).$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, με αντικατάσταση $y(x) = e^{\lambda x}z(x)$, αντιμετωπίζεται και η περίπτωση $n > 2$ και ο κανόνας είναι ο εξής:

(I) Αν ο αριθμός λ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε ψάχνουμε τη μερική λύση της (7.5) σε μορφή

$$y(x) = e^{\lambda x}\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s\big).$$

(II) Αν ο αριθμός λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας m, τότε ψάχνουμε την μερική λύση της (7.5) σε μορφή

$$y(x) = x^m e^{\lambda x}\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s\big).$$

Παρατηρούμε οτι αν οι αριθμοί $\lambda, A_0, ..., A_s$ είναι μιγαδικοί, τότε το πραγματικό μέρος της $y(x)$ ισούται με

$$x^m e^{px}\big[\tilde{P}_s(x)\cos qx + \tilde{Q}_s(x)\sin qx\big]$$

οπου $\lambda = p + iq$ και $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές (με $m = 0$ αν λ δεν είναι ρίζα του χ. π.).

Παράδειγμα 7.3 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 9y = e^{5x}.$$

Λύση. Το 5 δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$y(x) = B_0e^{5x}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση θα πάρουμε

$$25B_0 + 9B_0 = 1 \ \text{ άρα } \ B_0 = 1/34.$$

Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{34}e^{5x}.$$

Παράδειγμα 7.4 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' - y = e^x(x^2 - 1).$$

Λύση. Ο αριθμός 1 είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$y = xe^x\big(B_0x^2 + B_1x + B_2\big).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$e^x\big[6B_0x^2 + (4B_1 + 6B_0)x + 2B_2 + 2B_1\big] = e^x(x^2 - 1)$$

άρα $B_0 = 1/6,\ \ B_1 = -1/4,\ \ B_2 = -1/4$. Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = xe^x\Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\Big).$$

—————————-

Περνάμε τώρα στην πιο γενική περίπτωση όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των προσδιοριζόμενων συντελεστών. Θεωρούμε την εξίσωση

$$(7.7)\ \ y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{px}\Big(P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx\Big).$$

Εδώ $P_s(x)$ και $Q_s(x)$ πολυώνυμα, όπου το ένα απο αυτά είναι βαθμού s και το άλλο βαθμου $\le s$. Απο τον τύπο $Euler$ (βλ. σελίδα 41) έχουμε

$$\cos\, qx = \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2}, \quad \sin\, qx = \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις γράφουμε την (7.7) ως εξής

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y =$$

$$(7.8) \qquad e^{(p+iq)x}R_s(x) + e^{(p-iq)x}\overline{R}_s(x),$$

όπου

$$R_s(x) = \frac{P_s(x) - iQ_s(x)}{2}, \ \ \overline{R}_s(x) = \frac{P_s(x) + iQ_s(x)}{2}$$

Την (7.8) την «σπάμε» σε δυο εξισώσεις (βλ. $(\mathbf{\Delta})$ σελ. 44):

$$(7.9_1) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{(p+iq)x}R_s(x),$$

$$(7.9_2) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{(p-iq)x}\overline{R}_s(x),$$

και τις λύνουμε όπως την (7.5). Παρατηρούμε ότι

$$e^{(p+iq)x}R_s(x) = F(x) + iG(x),$$
$$e^{(p-iq)x}\overline{R}_s(x) = F(x) - iG(x),$$

οπου

$$F(x) = \frac{e^{px}}{2}\big(P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx\big),$$
$$G(x) = \frac{e^{px}}{2}\big(P_s(x)\sin qx - Q_s(x)\cos qx\big).$$

Αν η συνάρτηση $y_1(x) = u(x) + iv(x)$ είναι μερική λύση της (7.9_1) τότε η $\overline{y}_1(x) = u(x) - iv(x)$ είναι μερική λύση της (7.9_2).

Πράγματι (βλ. (**E**) σελ. 44)

$$L[u] = F, \ \ L[v] = G \ \ \Leftrightarrow \ \ L[u + iv] = F + iG, \ \ L[u - iv] = F - iG.$$

Η μερική λύση της (7.8) είναι το άθροισμα της μερικής λύσης της (7.9_1) και της μερικής λύσης της (7.9_2) άρα η $2u(x)$. Συνεπώς (λαμβάνοντας υπ όψιν την περίπτωση της εξίσωσης (7.5)) καταλήγουμε στο εξής:

Γενικός κανόνας:

(I) Αν ο αριθμός $p+iq$ (ή $p-iq$) δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε ψάχνουμε τη μερική λύση της (7.7) σε μορφή

$$y(x) = e^{px}\big[\tilde{P}_s(x)\cos qx + \tilde{Q}_s(x)\sin qx\big]. \tag{7.10}$$

(II) Αν ο αριθμός $p+iq$ (ή $p-iq$) είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας m, τότε ψάχνουμε τη μερική λύση της (7.7) σε μορφή

$$y(x) = x^m e^{px}\big[\tilde{P}_s(x)\cos qx + \tilde{Q}_s(x)\sin qx\big]. \tag{7.11}$$

Εδώ $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ πολυώνυμα βαθμού s με πραγματικούς συντελεστές.

* * *

Είναι αυτονόητο οτι ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή (7.10) (ή (7.11)) επειδή προηγουμένως έχουμε αποδείξει οτι τετόια μερική λύση υπάρχει.

Προσοχή! Αν κάποιο απο τα πολυώνυμα P_s ή Q_s στην (7.7) είναι βαθμού $< s$, ακόμα και αν είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν, τη λύση τη ψάχνουμε σε μορφή (7.10) ((7.11)).

Παράδειγμα 7.5 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Λύση. Προφανώς ο αριθμός $\pm 2i$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου k^2+4k+4, άρα ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$8B\cos 2x - 8A\sin 2x = \cos 2x,$$

άρα $B = 1/8, \quad A = 0$. Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{8}\sin 2x.$$

Παράδειγμα 7.6 Υπάρχει μερική λύση της εξίσωσης

$$y'''' + 2y'' + y = \sin x$$

της μορφής

$$y = x^2(A\cos x + B\sin x)?$$

Λύση. Εφόσον ο αριθμός i $(-i)$ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου k^4+2k^2+1, συνεπώς ναι, υπάρχει.

Σημαντική Παρατήρηση! Απο την ιδιότητα $(\mathbf{\Delta})$ (σελ. 44) προκύπτει ότι αν θέλουμε να βρούμε τη μερική λύση της εξίσωσης

$$L[y] = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),$$

αρκεί να βρούμε τις μερικές λύσεις των εξισώσεων

$$L[y] = f_1(x), \quad L[y] = f_2(x), \quad ..., \quad L[y] = f_n(x)$$

και μετά να πάρουμε το άθροισμα. Ανάλογα με την f_i εφαρμόζουμε ή την μέθοδο των προσδιοριζόμενων συντελεστών ή την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών.

Παράδειγμα 7.8 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} + x^2 + 1.$$

Λύση. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_{\gamma o}(x) = C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x.$$

Η μερική λύση της

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

είναι (βλ. παράδειγμα 6.2)

$$y_{\mu 1}(x) = \cos\, x \ln|\cos\, x| + x \sin\, x$$

(εδώ χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών).

Η μερική λύση της

$$y'' + y = x^2 + 1$$

είναι

$$y_{\mu 2}(x) = x^2 - 1$$

(εδώ χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο των προσδιοριζόμενων συντελεστών).

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x + \cos\, x \ln|\cos\, x| + x \sin\, x + x^2 - 1.$$

Παράδειγμα 7.9 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$x^2y'' + xy' + y = \ln^3 x + \ln x, \quad x > 0.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = e^t$. Για $y(t)$ έχουμε

$$y''(t) + y(t) = t^3 + t.$$

Άρα

$$y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + t^3 - 5t$$

και η λύση είναι

$$y(x) = C_1 \sin \ln x + C_2 \cos \ln x + \ln^3 x - 5 \ln x.$$

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η γενική λύση των εξισώσεων

1.

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

2.

$$y'' + 4y' + 4y = \sin 2x.$$

3.

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

4.
$$y''' - y = x^3 - 1.$$

5.
$$y'' + y = \frac{\cos\, x}{\sin\, x} + xe^x \sin\, x.$$

6.
$$x^2y'' + xy' + 4y = 2\ln^3 x - 1, \quad x > 0.$$

7.
$$y'' + y = f(x) + e^{2x}(x^2 + 1).$$

§8. Μέθοδος Δυναμοσειρών (σύντομη αναφορά)

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μια μέθοδο κατασκευής μερικής λύσης μιας γραμμικής εξίσωσης με μη σταθερούς συντελεστές υπο την προυπόθεση οτι οι συντελεστές και το δευτερο μέρος είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Ορισμός. *Λέμε ότι η συνάρτηση $u(x)$ είναι αναλυτική σε μια γειτονιά του σημείου x_0 αν μπορεί να γραφτέι ως δυναμοσειρά*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k, \quad \alpha_k - \text{ σταθερές},$$

στην γειτονιά αυτή.
Π.χ. η συνάρτηση e^x είναι αναλυτική σε όλο τον $\mathbf{R}$ και γράφεται ως

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

εδώ $\alpha_k = 1/k!$ (προφανώς πήραμε $x_0 = 0$).

Θεώρημα 8.1. *Αν οι συντελεστές και το δευτερο μέρος της εξίσωσης (6.1) είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε μια γειτονιά του σημείου x_0, τότε και η λύση της (6.1) είναι αναλυτική συνάρτηση στην γειτονιά αυτή.*

Η βασική ιδέα της μεθόδου των δυναμοσειρών είναι η εξής: συμφωνα με το Θεωριμα 8.1 ψάχνουμε τη λύση σε μορφή δυναμοσειράς γράφωντας προηγουμένως τους συντελεστές και το δεύτερο μέρος σε μορφή σειράς $Taylor$.
Θα περιοριστούμε με την περίπτωση $n = 2$ και $x_0 = 0$.

Παράδειγμα 8.1. Να βρεθέι η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - x\,y = 0.$$

Λύση. Ψάχνουμε μια λύση σε μορφή

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Αντικαθιστώντας τη σειρά αυτή στην εξίσωση έχουμε:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Την σχέση αυτή την γράφουμε σε μορφή

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k.$$

Συνεπώς για να επαληθεύεται η εξίσωση πρέπει (εξισώνουμε τους συντελεστές της ίδιας δυναμης) να ισχύει

$$a_2 = 0 \text{ και } (k+2)(k+1) a_{k+2} = a_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Άρα έχουμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 1 \tag{8.1}$$

με $a_2 = 0$ και αυθαίρετα a_0, a_1. Παρατηρούμε ότι, αφού $a_2 = 0$, απο την αναδρομική σχέση (8.1) έχουμε

$$a_{3k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

δηλαδή

$$a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0.$$

Επιπλέον (επίσης απο την (8.1)) με απλές πράξεις καταλήγουμε στο εξής:

$$a_{3k} = \frac{1\cdot 4\cdot\ 7\cdot 10\cdots(3k-2)}{(3k)!}a_0, \quad a_{3k+1} = \frac{1\cdot 2\cdot\ 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}a_1, \quad k \geq 1.$$

Άρα για $k = 1$ ορίζωνται οι a_3, a_4 για $k = 2$ οι a_6, a_7 για $k = 3$ οι a_9, a_{10} $\cdots$. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις. Ας πάρουμε $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ τότε η μια λύση είναι

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot\ 7\cdot 10\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}.$$

Παίρνοντας $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ θα βρούμε τη δεύτερη λύση

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}.$$

Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συνεπώς αποτελούν θεμελιώδες σύστημα συνεπώς η γενική λύση δίνεται απο τον τύπο

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Προφανώς $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ και $y_1'(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, έτσι αν έχουμε πρόβλημα $Cauchy$ $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ η λύση του θα είναι

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x).$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι και οι δύο σειρες (y_1, y_2) συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbf{R}$ μαζί με τις παραγώγους οποιασδήποτε τάξης.

Παράδειγμα 8.2. Να βρεθέι η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$y'' - x\,y = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Λύση. Προφανώς μερική λύση της εξίσωσης είναι $y_\mu = -x$, άρα η γενική είναι

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) - x.$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές έχουμε

$$1 = y(0) = C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) = C_1$$

και

$$-1 = y'(0) = C_1 y_1'(0) + C_2 y_2'(0) - 1 = C_2 - 1.$$

Συνεπώς $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ και η λύση του προβλήματος είναι

$$y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot\ 7 \cdot 10 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} - x.$$

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυναμοσειρών βεβαιωθείτε ότι η γενική λύση της

$$y'' + y = 0$$

είναι η $C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + xy = 0.$$

§9. Συστήματα εξισώσεων 2×2 με σταθερούς συντελεστές

Θα εξετάσουμε μια απλή περίπτωση συστήματος εξισώσεων.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό. Με t θα συμβολίζουμε την μεταβλητή και με $x(t)$, $y(t)$ τις άγνωστες συναρτήσεις. Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα

$$x' = a\,x + b\,y + f(t),$$

(9.1)

$$y' = c\,x + d\,y + g(t)$$

όπου $a\,b$, c, d δοσμένες σταθερές και $f(t)$, $g(t)$ δοσμένες συναρτήσεις. Θα υποθέσουμε ότι η $g(t)$ είναι $\mathbf{C}^1$ συνάρτηση ($f(t)$ είναι $\mathbf{C}^0$) και $c \neq 0$.

Θέλουμε να βρούμε τη λύση του συστήματος (9.1), δηλαδή τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ που επαληθεύουν τις εξισώσεις που απαρτίζουν το σύστημα (9.1).

Παραγωγίζουμε τη δεύτερη εξίσωση, προφανώς

$$y'' = c\,x' + d\,y' + g' = c(a\,x + b\,y + f) + d\,y' + g'.$$

Αντικαθιστώντας το $c\,x$ με $y' - d\,y - g$ παίρνουμε

$$y'' - (a+d)y' - (cb - ad)y = cf - ag + g'.$$

Προσδιορίζουμε την $y(t)$ και έπειτα την $x(t)$ απο την σχέση

$$y' = c\,x + d\,y + g.$$

Αν $c = 0$ τότε λύνουμε πρώτα την εξίσωση

$$y' = d\,y + g$$

και μετά την

$$x' = a\,x + b\,y + f.$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα $Cauchy$ είναι: να βρεθεί η λύση του συστήματος (9.1) τ.ω.

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

όπου t_0, x_0, y_0 - δοσμένες σταθερές.

Παράδειγμα 9.1 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$x' = x + y + 1/3$$

$$y' = 3x - y + e^t.$$

Λύση. Προφανώς έχουμε

$$y'' - 4y = 1.$$

Βρίσκουμε την $y(t)$ και έπειτα την $x(t)$ απο την σχέση

$$3x = y' + y - e^t.$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}/3 - 1/12 - e^t/3$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 1/4.$$

Αν έχουμε αρχικές συνθήκες π.χ.

$$x(0) = 7/6, \;\; y(0) = 1/6$$

τότε η λύση του προβλήματος $Cauchy$ είναι

$$x(t) = \frac{31}{24}e^{2t} + \frac{7}{24}e^{-2t} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3}e^{t}$$
$$y(t) = \frac{31}{24}e^{2t} - \frac{7}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

Τις σταθερές $C_1 = 31/24$, $C_2 = -7/8$ τις προσδιορίσαμε από

$$x(0) = C_1 - C_2/3 - 1/12 - 1/3 = 7/6,$$
$$y(0) = C_1 + C_2 - 1/4 = 1/6.$$

Πως λύνονται τα συστήματα στην γενική περίπτωση θα το μάθετε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Ασκήσεις.

1. Να βρεθεί η λύση $(x(t), y(t))$ του προβλήματος $Cauchy$

$$x' = x - 5y + 1, \;\; x(0) = 0$$
$$y' = 2x - y - 1, \;\; y(0) = 0.$$

Κεφάλαιο II.
Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

Εισαγωγή

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε με μερικά παράδειγματα από την κλασική Φυσική.

Παράδειγμα I. Η δύναμη βαρύτητας $\mathbf{F}$ που προκαλείται από μια σημειακή μάζα M στη θέση $(0,0,0)$ και ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο μάζας m στη θέση (x,y,z), δίνεται, συμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, από την σχέση

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}\mathbf{r}$$

ή

$$\mathbf{F} = \Big(-\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z \Big)$$

εδώ $\gamma > 0$ μια σταθερά, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ και $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Το διανυσματικο πεδίο $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικό δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση $u(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \to R$ τέτοια ώστε $\nabla u = \mathbf{F}$ ή

$$u_x = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, \;\; u_y = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, \;\; u_z = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z.$$

Προφανώς

$$u(x,y,z) = \gamma \frac{M\,m}{r}.$$

Επίσης έχουμε

$$u_{xx} = -\gamma\, M\, m \Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5} \Big),$$

$$u_{yy} = -\gamma\, M\, m \Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5} \Big),$$

$$u_{zz} = -\gamma\, M\, m \Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5} \Big),$$

συνεπώς

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{1}$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται *εξίσωση Laplace*. Την εξίσωση αυτή μπορούμε να την θεωρίσουμε και σε $n \geq 2$ διαστάσεις.

Θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \;\; \text{ή} \;\; \Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = u_{x_1 x_1} + ... + u_{x_n x_n}.$$

Για $n=2$ αντί για x_1, x_2 θα γράφουμε x, y ($\Delta\, u = u_{xx}+u_{yy}$) και για $n=3$ αντί για x_1, x_2, x_3 θα γράφουμε x, y, z ($\Delta\, u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$). Εξίσωση $Laplace$ θα ονομάζουμε την εξίσωση

$$(1') \qquad \Delta u = 0.$$

Έστω τώρα η μάζα M είμαι κατανεμημένη σε μία μπάλα $\mathbf{B}(\mathbf{0}, R)$ με κέντρο στο σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα R τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $u(x,y,z)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$(2) \qquad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = -4\pi\rho \ \text{ ή } \ \Delta u = -4\pi\rho$$

όπου η συνάρτηση $\rho(x,y,z)$ είναι η πυκνότητα της μάζας στο σημείο (x,y,z) (οι υπολογισμοί εδώ είναι αρκετά ογκώδεις). Η εξίσωση (2) ονομάζεται *εξίσωση* $Poisson$. Προφανώς εκτός της σφαίρας $\mathbf{B}(\mathbf{0}, R)$ όπου $\rho(x,y,z) \equiv 0$ η (2) γίνεται (1).

Τις ίδιες εξισώσεις επαληθεύει και το δυναμικό ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Παράδειγμα II. Ας δώσουμε ένα άλλο παράδειγμα όπου εμφανίζεται η εξίσωση $Laplace$. Έστω $\mathbf{u} = (u, v, w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, υποθέτουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και το ρευστό ασυμπίεστο δηλαδή

$$curl\, \mathbf{u} = 0, \quad div\, \mathbf{u} = 0$$

όπου

$$curl\, \mathbf{u} \equiv (w_y - v_z)i + (u_z - w_x)j + (v_x - u_y)k$$

και

$$div\, \mathbf{u} \equiv u_x + v_y + w_z$$

(σχετικά με την σχέση $div\, \mathbf{u} = 0$ βλέπε το παράδειγμα V). Συνεπώς έχουμε τις εξισώσεις

$$w_y = v_z, \;\; u_z = w_x, \;\; v_x = u_y$$

και

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς x

$$u_{xx} + v_{yx} + w_{zx} = 0$$

από την άλλη

$$v_{xy} = u_{yy}, \;\; w_{xz} = u_{zz},$$

συνεπώς

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Παρομοίως

$$v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = 0,$$

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0.$$

Βλέπουμε ότι και οι τρεις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{u}$ επαληθεύουν την εξίσωση $Laplace$.

Παράδειγμα III. Έστω $u(t, x, y, z)-$ θερμοκρασία στο σημείο $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz,$$

όπου $\rho > 0$ πυκνότητα και $c > 0$ θερμοχωρητικότητα, μας δίνει την συνολική θερμότητα που περιέχεται στο Ω. Σύμφωνα με τον νόμο $Fourier$ η θερμότητα ρέει από τα θερμά προς τα ψυχρά με βάση το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = -\kappa \nabla\, u$$

όπου $\kappa > 0$ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής θερμότητας καθορίζεται από την ροή της θερμότητας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές θερμότητας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nu\, ds + \int_\Omega f\, dxdydz,$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του Ω. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_\Omega div(\kappa\nabla u)\, dxdydz + \int_\Omega f\, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \Big((\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) - f\Big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) = f.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι ποσότητες ρ, c, κ είναι σταθερες, τότε για την θερμοκρασία u θα έχουμε

$$u_t - k\Delta u = \tilde{f}, \quad k = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{\rho c}. \tag{3}$$

Η (3) ονομάζεται *εξίσωση θερμότητας*. Σε μία διάσταση η εξίσωση θα γράφεται ως εξής

$$u_t - k u_{xx} = f.$$

Παράδειγμα IV. Η εξίσωση

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \;\text{ ή }\; u_{tt} - \Delta u = f, \tag{4}$$

ονομάζεται *κυματική εξίσωση* και περιγράφει μικρές ταλαντώσεις, εδω f δοσμένη συνάρτηση που έχει να κάνει με τις πηγές ενέργιας. Η αντίστοιχη εξίσωση με μια χωρική μεταβλητή, δηλαδή η

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

περιγράφει μικρές ταλαντώσεις μιας χορδής. Η προσδιοριστέα συνάρτηση u περιγράφει τη θέση ενος σημείου τη χρονική στιγμή t. Χωρίς να δωσουμε λεπτομέρειες θα επισημάνουμε οτι η εξίσωση (4) προκύπτει απο τον δευτερο νόμο του Νεύτωνα λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός οτι η u_{tt} είναι η επιτάχυνση και η Δu έχει να κάνει με τις δυνάμεις που δρούν πάνω στο στερεό που δέχεται μικρές ταλαντώσεις.

Παρατηρούμε ότι αν στα παραδείγματα III και IV η διαδικασία είναι στατική δηλαδή με το πέρασμα του χρόνου η u δεν μεταβάλλεται ($u_t = 0$, $u_{tt} = 0$) τότε και η (3) και η (4) γίνονται εξίσωση $Laplace$ ($Poisson$ αν $f \not\equiv 0$). Τέσσερα τελείως διαφορετικής φύσεως φαινόμενα περιγράφονται απο την ίδια εξίσωση! Επίσης το πραγματικό και φανταστικό μερος μιας αναλυτικής συνάρτησης $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($i = \sqrt{-1}$) ικανοποιούν την εξίσωση $Laplace$, αυτό άμεσα προκύπτει από τις συνθήκες $Cauchy - Riemann$:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{5}$$

Μια συνάρτηση η οποία επαληθευει την εξίσωση $Laplace$ ονομάζεται *αρμονική συνάρτηση*. Τέτοιες συναρτήσεις παίζουν πολύ συμαντικό ρόλο στα Καθαρά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Παράδειγμα V. Έστω τώρα $\rho(t, x, y, z)-$ πυκνότητα στο σημείο $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho \, dxdydz,$$

μας δίνει την συνολική μάζα του Ω. Έστω $\mathbf{u} = (u, v, w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού. Από τον νόμο διατήρησης της μάζας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής μάζας καθορίζεται από την ροή της μάζας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές της μάζας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dxdydz = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u} \cdot \nu \, ds + \int_\Omega f \, dxdydz.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dxdydz = -\int_\Omega div(\rho \, \mathbf{u}) \, dxdydz + \int_\Omega f \, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \big(\rho_t + div(\rho \, \mathbf{u}) - f\big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\rho_t + div(\rho \, \mathbf{u}) = f.$$

Συνήθως παίρνουνε $f \equiv 0$, δηλαδή

$$\rho_t + div(\rho \, \mathbf{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho + \rho \, div\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Αν θα υποθέσουμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή, το οποιο σημαίνει οτι η ύλη είναι ασυμπίεστη, τότε απο την (6) προκύπτει

$$div \, \mathbf{u} = 0,$$

αυτή η συνθήκη ονομάζεται *συνθήκη ασυμπιεστότητας*.

Το διανυσματικό πεδίο $(x(t), y(t), z(t))$ περιγράφει την θέση ενός σημείου τη χρονική στιγνή t. Η καμπύλη $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \; t \in (t_0, T)$ ονομάζεται *τροχιά.* Το διανυσματικό πεδίο $(x'(t), y'(t), z'(t))$ περιγράφει την ταχύτητα το σημείου αυτού αρα η καμπύλη $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ορίζεται από το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Αν η ύλη είναι ασυμπίεστη τότε η πυκνότητα κατά μήκος της τροχιάς πρέπει να είναι σταθερή (οχι απαραίτητα σταθερή παντου οπως είχαμε υποθέσει πιο πάνω), δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\rho(t, \overline{\sigma}(t)) \equiv \frac{d}{dt}\rho(t, x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Απο τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dt}\rho(t, x(t), y(t), z(t)) = \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho_z w \equiv \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho,$$

άρα

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{7}$$

Προφανώς από την (6) και την (7) πάλι προκύπτει η συνθήκη ασυμπιεστότητας $div\,\mathbf{u} = 0$.

Σε μία διάσταση η εξίσωση (7) γράφεται ως εξής

$$\rho_t + u\,\rho_x = 0.$$

Παράδειγμα VI. Τέλος θα δώσουμε (χωρίς λεπτομέρειες) τις εξισώσεις που περιγράφουν τη *διάδοση των ακουστικών κυμάτων*:

$$\rho_0 u_t + p_x = 0, \quad p_t + \rho_0 c_0^2 u_x = 0, \tag{8}$$

εδώ η $u(t, x)$ είναι η ταχύτητα, η $p(t, x)$ είναι η πίεση και ρ_0, c_0 δοσμένες θετικές σταθερές, ρ_0 είναι η πυκνότητα και η σταθερά c_0 έχει να κάνει με την συμπιεσιμότητα της ύλης.

Παρατηρούμε ότι αν παραγωγίσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς t, τη δεύτερη ως προς x και μετά αφαιρέσουμε την δεύτερη από την πρώτη θα έχουμε την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0$$

(αν παραγωγίσουμε την πρώτη ως προς x και θα την πολλαλπλασιάσουμε με c_0^2, τη δεύτερη ως προς t και μετά αφαιρέσουμε την πρώτη από την δεύτερη θα έχουμε κυματική εξίσωση για την πίεση $p_{tt} - c_0^2 p_{xx} = 0$.)

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε και πολλά άλλα παραδείγματα, από την δυναμική των πληθυσμών έως την χρηματοοικονομία, και προφανώς από την Φυσική.

Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις) καλούνται εξισώσεις με μια άγνωστη συνάρτηση, τουλάχιστον δύο μεταβλητών, που εκτός ενδεχομένως από την άγνωστη συνάρτηση και τις ανεξάρτητες μεταβλητές περιέχουν και μερικές παραγώγους της συνάρτησης.

Τάξη μιας εξίσωσης καλείται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Παραδείγματος χάριν οι (1), (2), (3), (4) είναι δεύτερης τάξης ενώ οι (6), (7) είναι πρώτης. Το σύστημα (5) και (8) είναι σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης.

Γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξεως σε γενική μορφή είναι η εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})u_{x_i} + a(\mathbf{x})\,u = f(\mathbf{x}), \tag{9}$$

γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως σε γενική μορφή είναι η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})u_{x_i} + a(\mathbf{x})\,u = f(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Εδώ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, οι $a_{i,j}$, a_i, a και f είναι δοσμένες συναρτήσεις ενώ η $u(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση που πρέπει να προσδιορίσουμε. Στις εξισώσεις που περιγράφουν χρονοεξαρτώμενες διαδικασίες αντί για x_1 (ή x_n) συνήθως γράφουμε t.

Λύση της (9) σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζουμε μια συνάρτηση δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω η οποία επαληθεύει την (9) σε κάθε σημείο $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Παρομοίως λύση της (10) σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζουμε μια συνάρτηση μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω η οποία επαληθεύει την (10) σε κάθε σημείο $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$.

Στο μάθημα αυτό θα περιοριστούμε με εξισώσεις που έχουν μόνο δυο ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορούν να λυθούν σε κλειστή μορφή.

Π.χ. για $n = 2$ οι συνάρτησεις

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \;\; u(x, y) = x\,y$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

δηλαδή αρμονικές συναρτήσεις. Οι συνάρτησεις

$$u(t, x) = e^{-t}\sin x, \;\; u(t, x) = e^{-t}\cos x$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_t = u_{xx},$$

ενω οι συνάρτησεις

$$u(t, x) = \cos t\,\sin x, \;\; u(t, x) = \sin t\,\cos x$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_{tt} = u_{xx}.$$

Εξίσου εύκολα διαπιστώνουμε οτι οι συναρτήσεις

$$u(t, x) = t + x, \;\; u(t, x) = \sin(t + x), \;\; u(t, x) = e^{t+x}$$

έναι λύσεις της εξίσωσης

$$u_t - u_x = 0.$$

1. Εξισώσεις πρώτης τάξης

Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση εξίσωσης πρώτης τάξεως. Θέλουμε να βρούμε τη λύση $u(t,x)$ της εξίσωσης

$$u_t + u_x = 0. \tag{1.1}$$

Γνωρίζουμε οτι η παράγωγος της u κατα κατεύθυνση που ορίζεται απο το μοναδιαίο διάνυσμα $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = \nabla u \cdot \overline{\nu} = u_t \nu_1 + u_x \nu_2.$$

Αρα αν θα πάρουμε $\nu_1 = \nu_2 = \sqrt{2}/2$ τότε η (1.1) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = 0. \tag{1.2}$$

Τι σημαίνει αυτο; Προφανώς το διάνυσμα $\overline{\nu} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ορίζει στον $\mathbf{R}^2$ μια οικογένεια ευθειών

$$x - t = C$$

και η σχέση (1.2) μας λέει ότι κατα μήκος αυτών των ευθειών η $u(t,x)$ δεν μεταβάλλεται, δηλαδή οταν $x - t = C$ η u ειναι σταθερά συνεπώς έχει τη μορφή

$$u(t,x) = g(x-t) \tag{1.3}$$

όπου g τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση, ευκολα διαπιστώνουμε οτι

$$u_t + u_x = -g'(x-t) + g'(x-t) = 0.$$

Ο τύπος (1.3) μας δίνει τη γενική λύση της (1.1).

Προβλήμα $Cauchy$: να βρεθεί η λύση της (1.1) στον $\mathbf{R}^2$ η οποία επαληθευει τη συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x) \quad \text{για} \quad |x| < \infty, \tag{1.4}$$

όπου $\phi(x)$ μια δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η (1.4) ονομάζεται αρχική συνθήκη. Απο την (1.3) άμεσα προκύπτει οτι η λύση του προβλήματος (1.1), (1.4) δίνεται απο τον τύπο

$$u(t,x) = \phi(x-t).$$

Π.χ. αν $\phi(x) = \sin x$, τότε $u = \sin(x-t)$, αν $\phi(x) = x^2 + e^x - 1$, τότε $u = (x-t)^2 + e^{x-t} - 1$ και ουτω καθεξής.

Θα αναρωτηθούμε τωρα τι θα συμβεί αν στο πρόβλημα $Cauchy$ (1.1), (1.4) οι αρχικές συνθήκες (1.4) είναι δοσμένες όχι σε όλο τον $\mathbf{R}$ αλλά μόνο σε ένα διάστημα (a,b) ; Δηλαδή η συνάρτηση $\phi(\xi)$ δίνεται μόνο για $\xi \in (a,b)$. Αφου η λύση είναι $u = \phi(x-t)$, είναι προφανές οτι η $u(t,x)$ ορίζεται μόνο για $x - t \in (a,b)$ δηλαδή σε μια λωρίδα

$$a < x - t < b.$$

Περνάμε στην πιο γενική εξίσωση

$$u_t + a(t,x)u_x = f(t,x,u) \quad \text{στον} \quad \mathbf{R^2}. \tag{1.5}$$

Εδώ a και f δοσμένες συνεχείς (φραγμένες σε φραγμένα χωρία) συναρτήσεις. Έστω
$$\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s)) \ \ (\overline{\sigma} : s \to (t(s), x(s))$$
μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $u(t,x)$ πάνω στην $\overline{\sigma}$ (περιορισμός της u στην $\overline{\sigma}$), δηλαδή
$$u(t(s), x(s)) = u(s).$$
Προφανώς, απο τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε
$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{d}{ds}u(t(s), x(s)) = u_t(t(s), x(s))\frac{dt}{ds} + u_x(t(s), x(s))\frac{dx}{ds}.$$
Αν
$$\frac{dt}{ds} = 1 \ \text{ και } \ \frac{dx}{ds} = a(t(s), x(s))$$
τότε η εξίσωση (1.5) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή
$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$
που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Για να βρούμε τη λύση αρκεί να ολοκληρώσουμε ως προς s.

Αν $t(0) = 0$ τότε $t = s$ και η καμπύλη γράφεται ως
$$\overline{\sigma}(t) = (t,\, x(t)),$$
η εξίσωση (1.5) κατά μήκος της καμπύλης θα παρει την μορφή
$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$
αφου πάνω στην καμπύλη $u(t) = u(t, x(t))$.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα $Cauchy$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (1.5) η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη
$$u(0, x) = \phi(x), \quad |x| < +\infty \tag{1.6}$$
Ας υποθέσουμε ότι
$$\bar{\sigma}(0) = \big(t(0), x(0)\big) = (0, x_0), \quad (\overline{\sigma} : 0 \to (0, x_0)).$$
Θεωρούμε το σύστημα
$$\frac{d\,t(s)}{d\,s} = 1, \quad \frac{d\,x(s)}{d\,s} = a(t(s), x(s))$$
με αρχικές συνθήκες
$$t(0) = 0, \quad x(0) = x_0.$$
Προφανώς $t = s$, άρα έχουμε
$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$
και η εξήσωση (1.5) γράφεται ως εξής
$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

(εδω $u(t) = u(t, x(t))$) με αρχική συνθήκη

$$u(0) = u(0, x(0)) = \phi(x(0)) = \phi(x_0).$$

Η εξίσωση

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t))$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** και η λύση της ονομάζεται **χαρακτηριστική**. Για να λύσουμε την εξίσωση (1.5) πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t))$$

(1.7)

$$\frac{d\,u(t)}{d\,t} = f(t, x(t), u(t)).$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1.7) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση, η δεύτερη είναι η (1.5) κατά μήκος της χαρακτηριστικής. Για να λύσουμε την πρόβλημα (1.5), (1.6) προσθέτουμε στο (1.7) τις αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0,$$

(1.8)

$$u(0) = \phi(x_0).$$

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο εξής: η επίλυση του προβλήματος (1.5), (1.6) ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος (1.7), (1.8). Τη λύση τη βρίσκουμε σε παραμετρική μορφή $(x(t), u(t))$ και μετά εκφράζουμε τη u ως συνάρτηση των t, x σε κλειστή μορφή (αυτό δεν είναι πάντα εφικτό).

Υπο ποιές προυποθέσεις το πρόβλημα (1.5), (1.6) έχει μοναδική λύση θα το μάθετε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Μπορούμε, φυσικά και να μην την κάνουμε την απλοποίηση $t = s$, τότε αντι (1.7) θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{d\,t}{d\,s} = 1, \quad \frac{d\,x(s)}{d\,s} = a(t(s), x(s)), \quad \frac{d\,u(s)}{d\,s} = f(t(s), x(s), u(s)).$$

Θα βρούμε τη λύση σε παραμετρική μορφή $(t(s), x(s), u(s))$ και θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη u ως συνάρτηση των t, x.

Παράδειγμα 1.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + au_x = b, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad u(0, x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = at + x_0 \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = b, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = bt + \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) = bt + \phi(x - at).$$

Έστω $a = b = 1$, $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t,x) = t + e^{x-t}.$$

Έστω $a = -1$, $b = 2$, $\phi(x) = \sin x$, τότε

$$u(t,x) = 2t + \sin(x+t).$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_t + a\,u_x = b$, παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης $x - at$ =σταθερά η $u(t)$ επαληθεύει την εξίσωση $u'(t) = b$, δηλαδή $u = bt + C$ όπου η C είναι μια ποσότητα η οποία είναι σταθερή όταν η διαφορά $x - at$ είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = bt + g(x - at)$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση. (Προφανώς για τυχαία συνάρτηση g η $g(x-at)$ είναι σταθερά αν και μόνο αν η $x - at$ είναι σταθερά).

Παράδειγμα 1.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$u_t + x\,u_x = 0, \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^t \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \phi(xe^{-t}).$$

Αν $\phi(x) = x$, τότε η λύση είναι

$$u(t,x) = x\,e^{-t}.$$

Αν $\phi(x) = x^2 + 1$,τότε

$$u(t,x) = x^2 e^{-2t} + 1.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_t + x\,u_x = 0$, παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης $x\,e^{-t}$ =σταθερά η u είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x\,e^{-t})$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Ας λύσουμε το πρόβλημα αυτό χωρίς την απλοποίηση $s = t$:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad t\Big|_{s=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad t(s) = s,$$

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad x\Big|_{s=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(s) = x_0 e^s,$$

$$\frac{du}{ds} = 0, \quad u\Big|_{s=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(s) = \phi(x_0).$$

Αφου $x_0 = xe^{-s}$ και $s = t$, προφανώς $u = \phi(x\,e^{-t})$.

Παράδειγμα 1.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + t\, u_x = (t+x)u, \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = t, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_0 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = (t+x)u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \big(t + \frac{1}{2}t^2 + x_0\big)dt,$$

άρα

$$u(t) = \phi(x_0)e^{x_0 t + t^3/6 + t^2/2}.$$

Συνεπώς

$$u(t,x) = \phi(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3}$$

Έστω $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t,x) = e^{x + tx - t^3/3}.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u_t + t\, u_x = (t+x)u$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3},$$

g τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + (t-x)\, u_x = (x+1-t)e^t \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x) \ \text{ για } \ |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για

$$\phi(x) = 2x + 1 \ \text{ και } \ \phi(x) \equiv 1.$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = -x + t, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = (x_0+1)e^{-t} + t - 1 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

(εδω λύσαμε εξίσωση πρώτης τάξης $x'(t) + x(t) = t$), συνεπώς η αρχική εξίσωση κατα μήκος της χαρακτηριστικής με την αρχική συνθύκη παίρνει τη μορφή

$$\frac{du}{dt} = x_0 + 1, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(t) = t(x_0+1) + \phi(x_0),$$

άρα

$$u(t,x) = te^t(x - t + 1) + \phi\big(e^t(x - t + 1) - 1\big)$$

αφού $x_0 = e^t(x - t + 1) - 1$.

Αν $\phi(x) = 2x + 1$

$$u(t,x) = te^t(x - t + 1) + 2e^t(x - t + 1) - 1.$$

Για $\phi(x) \equiv 1$

$$u(t,x) = te^t(x - t + 1) + 1.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u_t + (t-x)\,u_x = (x+1-t)e^t$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g\big(e^t(x-t+1)-1\big) + te^t(x-t+1),$$

g οπως και πριν, τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση

$$a_1(t,x)u_t + a_2(t,x)u_x = f(t,x,u) \tag{1.9}$$

όπου

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0. \tag{1.10}$$

Έστω $\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$ μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dt}{ds} = a_1 \ \text{ και } \ \frac{dx}{ds} = a_2$$

τότε η εξίσωση (1.9) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Η συνθήκη (1.10) είναι ουσιαστική, αν παραβιάζεται τότε το πρόβλημα $Cauchy$ μπορεί να μην έχει λύση (βλ. Άσκηση 5.). Στην περίπτωση που σε κάποιο σημείο ισχύει $a_1^2+a_2^2=0$ λέμε ότι σε αυτό το σημείο η εξίσωση *εκφυλίζεται.* Παρατηρούμε οτι για την εξίσωση (1.5) η (1.10) πάντα επαληθεύεται.

Θα τελειώσουμε με μία σημαντική παρατήρηση. Ας γράψουμε την εξίσωση (1.9) σε μορφή

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u_t + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u_x = \frac{f}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}. \tag{1.11}$$

Έστω $\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$ είναι τωρα η καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dt}{ds} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \ \text{ και } \ \frac{dx}{ds} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

τότε προφανώς

$$\|\overline{\sigma}'(s)\| = \sqrt{t'^2(s) + x'^2(s)} = 1$$

και το αριστερό μέρος της (1.11) είναι η παράγωγος της u κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$.

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ με $\phi(x)$ τυχαία ομαλή συνάρτηση.

1.

$$u_t + x\,u_x = x\,u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \ \ |x| < +\infty.$$

2.

$$u_t + u_x = x(u+1), \;\; u(0,x) = cos\, x, \;\; |x| < +\infty.$$

3.

$$u_t - (t+x)\, u_x = (x-1+t)e^t, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για

$$\phi(x) = 2x - 1 \;\text{ και }\; \phi(x) \equiv -1.$$

4.

$$u_t + u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x)$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{για } |x| < \pi/2 \\ 1, & \text{για } x \geq \pi/2 \\ -1, & \text{για } x \leq -\pi/2 \end{cases}$$

5.

$$u_t - \frac{t}{x}\, u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(|x|), \;\; |x| < +\infty.$$

6. Εξετάστε αν το ακόλουθο πρόβλημα έχει λύση

$$u_t - \frac{t}{x}\, u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \;\; |x| < +\infty.$$

Στις παρακάτω ασκήσεις να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ και να προσδιορισθεί το χωρίο στον $\mathbf{R}^2$ όπου η αρχική συνθήκη ορίζει τη λύση.

7.

$$u_t + u_x = 4, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\, x \;\text{ για }\; |x| < 1.$$

8.

$$u_t + x\, u_x = (x+t)u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \;\; x \in [0,1] \cup [2,3].$$

§2. Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

Η (9) για $n = 2$ παίρνει τη μορφή

$$a_{11}u_{xx} + \tilde{a}_{12}u_{xy} + \tilde{a}_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a\,u = f$$

θεωρούμε ότι $u = u(x, y) \in C^2$(δηλαδή δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη) και γράφουμε την εξίσωση σε μορφή

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a\,u = f \tag{2.1}$$

όπου

$$a_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21}).$$

Οι συναρτήσεις $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$ ονομάζονται *συντελεστές* της εξίσωσης και η συνάρτηση $f(x, y)$ το *δεύτερο μέρος* της.

Λέμε ότι η (2.1) είναι στο σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$

1.) *υπερβολική* (υπερβολικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

2.) *ελλειπτική* (ελλειπτικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

3.) *παραβολική* (παραβολικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Εάν η εξίσωση είναι υπερβολική $\forall (x, y) \in \Omega$ λέμε ότι είναι υπερβολική στο Ω, ανάλογα ορίζεται η ελλειπτικότητα και η παραβολικότητα στο Ω.

Προφανώς η κυματική εξίσωση

$$u_{yy} - u_{xx} = 0$$

είναι υπερβολικού τύπου, (συνήθως αντί για y γράφουμε t επειδή η μεταβλητή αυτή παίζει τον ρόλο του χρόνου), η εξίσωση $Laplace$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

είναι ελλειπτικού τύπου, και η εξίσωση θερμότητας

$$u_y - u_{xx} = 0$$

παραβολικού τύπου (και εδώ συνήθως αντί για y γράφουμε t για τον ίδιο λόγο).

Όπως είναι γνωστό, η καμπύλη

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

είναι έλλειψη, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, υπερβολή, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ και παραβολή, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Σε αυτό οφείλουν την ονομασία τους οι τρεις τύποι των εξισώσεων.

Ασκήσεις.

1. Στον $\mathbf{R^2}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{xx} + 2u_{xy} + yu_{yy} + u_x - u_y - u = 1.$$

Προσδιορίστε τα χωρία όπου η εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου, παραβολικού τύπου, ελλειπτικού τύπου.

2. Προσδιορίστε τον τύπο των ακόλουθων εξισώσεων:

$$u_{xy} = f, \;\; u_y + u_{xx} = f, \;\; xu_{xx} + u_{yy} = f$$

όπου f τυχαία γραμμική συνάρτηση των x, y, u, u_x, u_y.

§3. **Κυματική Εξίσωση, τύπος** $d'Alembert$

Στον $\mathbf{R}^2$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \tag{3.1}$$

όπου η f είναι δοσμένη ομαλή συνάρτηση, t - χρόνος, x - χωρική μεταβλητή, u_{tt} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς t και u_{xx} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς x. Ψάχνουμε τη *γενική λύση* $u(t,x)$ της εξίσωσης (3.1).

Έστω $f \equiv 0$, έχουμε

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{3.2}$$

Η (3.2) ονομάζεται ομογενής εξίσωση. Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$(t,x) \to (\xi,\eta)$$

$$u(t,x) \to u(\xi,\eta) = u(\xi(t,x),\eta(t,x))$$

όπου

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t.$$

Προφανώς

$$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}u(\xi(t,x),\eta(t,x)) = u_\xi(\xi,\eta)\xi_t + u_\eta(\xi,\eta)\eta_t = -u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta),$$

$$u_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}u(\xi(t,x),\eta(t,x)) = u_\xi(\xi,\eta)\xi_x + u_\eta(\xi,\eta)\eta_x = u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta).$$

Παρομοίως για τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(-u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta)\Big) =$$

$$-u_{\xi\xi}(\xi,\eta)\xi_t - u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\eta_t + u_{\eta\xi}(\xi,\eta)\xi_t + u_{\eta\eta}(\xi,\eta)\eta_t =$$

$$u_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta),$$

$$u_{xx}(t,x) = ... = u_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Άρα

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = -4u_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

συνεπώς η (3.2) παίρνει τη μορφή

$$u_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0. \tag{3.3}$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές παίρνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (3.3):

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + \Phi(\eta),$$

όπου F και Φ αυθαίρετες δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης (3.1) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t).$$

Έστω τώρα οι v και w λύσεις της (3.1), δηλαδή

$$v_{tt} - v_{xx} = f \;\text{ και }\; w_{tt} - w_{xx} = f,$$

τότε η $\tilde{u} \equiv v - w$ είναι λύση της εξίσωσης (3.2), πράγματι

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = v_{tt} - v_{xx} - (w_{tt} - w_{xx}) = f - f = 0.$$

Άρα αν βρήκαμε κάποια (μερική) λύση της (3.1) π.χ. την w τότε οποιαδήποτε άλλη λύση v της (3.1) δίνεται από τον τύπο

$$v = w + \tilde{u}.$$

Τουτ' έστιν ισχύει το εξής

γενική λύση της (3.1)=
μερική λύση της (3.1) + *γενική λύση της (3.2)*.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) d\tau$$

είναι μερική λύση της (3.1). Πράγματι θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau, \quad \text{όπου} \;\; G(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta.$$

Εξ ορισμού της παραγώγου

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big) =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_0^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau - \int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_t^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau + \int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau) \big) d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Big[G(t+\Delta t,x,\tau^*) + \frac{1}{\Delta t}\int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau) \big) d\tau \Big] =$$

$$G(t,x,t) + \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau = \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau,$$

όπου $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$. Εδώ αφαιρέσαμε και προσθέσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau$$

και μετά χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τα ολοκληρώματα. Θα υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο G_t, έχουμε

$$G_t(t,x,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\Big(\int_0^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta + \int_{x-t+\tau}^0 f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) =$$

$$\frac{1}{2}\big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau \big].$$

Συνεπώς έχουμε

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau,x+t-\tau) + f(\tau,x-t+\tau) \big] d\tau,$$

$$u_{0tt}(t,x) = f(t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau, x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Παρομοίως

$$u_{0x}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) - f(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

$$u_{0xx}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau, x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Δηλαδή

$$u_{0tt} - u_{0xx} = f(t,x).$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι η γενική λύση της (3.1) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau.$$

Πρόβλημα $Cauchy$**.** Να βρεθεί στον $\mathbf{R^2}$ η λύση της εξίσωσης (3.1) η οποία ικανοποιεί τις *αρχικές συνθήκες*

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad \text{για} \quad |x| < +\infty, \tag{3.4}$$

όπου ϕ και ψ δοσμένες ομαλές συναρτήσεις.

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα $Cauchy$ (3.2), (3.4). Η γενική λύση της εξίσωσης (3.2) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t)$$

με αυθαίρετες (ομαλές) F και Φ. Πρέπει να προσδιορίσουμε τις F και Φ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (3.4). Έχουμε

$$u(0,x) = F(x) + \Phi(x) = \phi(x),$$

$$u_t(0,x) = -F'(x) + \Phi'(x) = \psi(x).$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη ισότητα παίρνουμε

$$-F(x) + \Phi(x) + C = \int_{x_0}^x \psi(\zeta)d\zeta,$$

με C αυθαίρετη σταθερά. Τώρα χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα καταλήγουμε στο

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}C$$

και

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}C$$

Συνεπώς

$$\Phi(x+t) = \frac{1}{2}\phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}C$$

$$F(x-t) = \frac{1}{2}\phi(x-t) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}C$$

και η λύση του προβλήματος (3.2), (3.4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται **τύπος** $d'Alembert$.

Παράδειγμα 3.1 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin x, \;\; u_t(0,x) = x \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση: Έχουμε $\phi(x) = \sin x$, $\psi(x) = x$ άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \zeta d\zeta = \sin x \, cos\, t + xt.$$

Περνάμε τώρα στην γενική περίπτωση, θεωρούμε το πρόβλημα $Cauchy$ (3.1), (3.4). Κατ αρχάς παρατηρούμε ότι για την

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau$$

έχουμε

$$u_0(0,x) = 0.$$

Επίσης

$$u_{0t}(0,x) = 0,$$

διότι

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος $Cauchy$ (3.1), (3.4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \tag{3.5}$$

$$\frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau$$

Παράδειγμα 3.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin 2x, \;\; u_t(0,x) = 0 \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) = \sin 2x$, $\psi(x) = 0$, $f(t,x) = 1$ άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(2(x+t))+\sin(2(x-t))}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2(t-\tau)d\tau =$$

$$\sin 2x \, cos\, 2t + \frac{t^2}{2}.$$

Παρατήρηση 1. Για να είναι η λύση του προβλήματος (3.1), (3.4) δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ($u(t,x) \in C^2$) πρέπει $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$, $f(t,x) \in C^1$.

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ προκύπτει άμεσα άπο τον τρόπο κατασκευής της λύσης μέσω της γενικής λύσης της εξίσωσης. Πράγματι έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty,$$
$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x), \;\; v(0,x) = \phi(x), \;\; v_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w \equiv u - v$. Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0$$

και

$$w(0,x) = w_t(0,x) = 0 \;\; |x| < \infty.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι $F(x-t) + \Phi(x+t)$ και επαληθεύοντας τις μηδενικές αρχικές συνθήκες καταλήγουμε στο ότι $F \equiv \Phi \equiv 0$ άρα

$$w \equiv 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; u \equiv v.$$

Ας επιστρέψουμε τωρα στο προβλημα (3.2), (3.4). Είναι προφανές οτι αν οι αρχικές συνθήκες είναι μήδεν, τότε και η λύση είναι μηδεν για κάθε t. Έστω τώρα $a > 0$ και

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases} \quad .$$

Ας πάρουμε ένα σημείο $(t_0 \neq 0, x_0)$, για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς ας πάρουμε $x_0 = 0$, έχουμε

$$u(t_0, 0) = \frac{\phi(t_0) + \phi(-t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t_0}^{t_0} \psi(\zeta)d\zeta.$$

Αν ο χρόνος $|t_0| < a$, τότε $u(t_0,0) = 0$ δηλαδή $u(t,0) = 0 \; \forall t \in (-a,a)$. Μόνο όταν ο χρόνος θα φτάσει στο a $(-a)$ η λύση θα ¨νιώσει¨ την διαταραχη που είχε γίνει στην αρχική στιγμή $t = 0$. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών.*

Παράδειγμα 3.3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\; \text{στον} \;\; \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\; \text{για} \;\; |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [-1,1] \;\; \text{και} \;\; \phi(x) > 0 \;\; \text{για} \;\; x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1],$$
$$\psi(x) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [0,1] \;\; \text{και} \;\; \psi(x) > 0 \;\; \text{για} \;\; x \in \mathbf{R} \setminus [0,1].$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.

Λύση. Έχουμε

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

Για να ισχύει $u(t,x)=0$ πρέπει $\phi(x+t)=0$, $\phi(x-t)=0$ και $\psi(\zeta)=0$. Άρα

$$x+t\in[-1,1],\quad x-t\in[-1,1]$$

και

$$x+t\in[0,1],\quad x-t\in[0,1].$$

Συνεπώς

$$0\le x+t\le 1,\quad 0\le x-t\le 1$$

δηλαδή ρόμβος με κορυφές στα σημεία (0,0), (1,0), (1/2,1/2), (1/2, -1/2).

Παράδειγμα 3.4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x)=\phi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x) \text{ για } |x|<\infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x)\in C^2,\quad \psi(x)\in C^1$ και

$$\phi(x)>0 \text{ για } x\in(-1,0) \text{ και } \phi(x)\equiv 0 \text{ για } x\in\mathbf{R}\setminus(-1,0),$$

$$\psi(x)>0 \text{ για } x\in(1,2) \text{ και } \psi(x)\equiv 0 \text{ για } x\in\mathbf{R}\setminus(1,2).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x)>0$.

Λύση. Έχουμε

$$u(t,x)=\frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\zeta)d\zeta$$

Αφού οι ϕ και ψ είναι μη αρνητικές για να ισχύει $u(t,x)>0$ σε ένα σημείο (t,x) αρκεί στο σημείο αυτο να ισχύει ενα απο τα παρακάτω

$$\phi(x+t)>0 \text{ ή } \phi(x-t)>0$$

ή στο διάστημα $(x-t,x+t)$ η ψ να έιναι κάπου θετική, δηλαδή

$$x+t\in(-1,0) \text{ ή } x-t\in(-1,0)$$

ή

$$(x-t,x+t)\cap(1,2)\ne\emptyset.$$

Υπο την προϋπόθεση $x-t\le x+t \Leftrightarrow t\ge 0$ αλλιώς το ολοκλήρωμα $\int_{x-t}^{x+t}\psi(\zeta)d\zeta$ μπορεί να είναι αρνητικό. Συνεπώς το ζητούμενο χωρίο είναι το εξής

$$\{(t,x):t\ge 0,\ -1<x+t<0\}\cup\{(t,x):t\ge 0,\ -1<x-t<0\}\cup$$
$$\{(t,x):t\ge 0,\ 1<x-t<2\}\cup\{(t,x):t\ge 0,\ 1<x+t<2\}\cup$$
$$\{(t,x):t\ge 0,\ x-t<1,\ x+t>2\}.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t,x),\quad a\ne 0 \text{ σταθερά}$$

ανάγεται με αντικατάσταση $y=x/a$ στην εξίσωση

$$u_{tt}-u_{yy}=f(t,y)$$

(συνεπώς χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε $a = 1$.)

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$u_{tt} - u_{xx} = t + x \;\text{ στον }\; \mathbf{R^2}$$
$$u(0,x) = x^3, \;\; u_t(0,x) = \sin 2x \;\text{ για }\; |x| < \infty.$$

3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος *Cauchy*:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\text{ για }\; |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R} \setminus (0,1) \;\text{ και }\; \phi(x) > 0 \;\text{ για }\; x \in (0,1),$$
$$\psi(x) \equiv 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}.$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) > 0$.

4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος *Cauchy*:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\text{ για }\; |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R},$$
$$\psi(x) \equiv 0 \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R} \setminus (-1,0) \;\text{ και }\; \psi(x) > 0 \;\text{ για }\; x \in (-1,0).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.

5. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος *Cauchy*:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\text{ για }\; |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R} \setminus (0,1) \;\text{ και }\; \phi(x) < 0 \;\text{ για }\; x \in (0,1),$$
$$\psi(x) \equiv 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R} \setminus (2,3) \;\text{ και }\; \psi(x) < 0 \;\text{ για }\; x \in (2,3),$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) < 0$.

§4. **Σειρές** $Fourier$

Ένα σύστημα συναρτήσεων $\{\psi_m\}$ ή $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ ...,\ \psi_m,\ ...$$

ονομάζεται **ορθοκανονικό στο διάστημα** (a,b) αν

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο (a,b), δηλαδή

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty.$$

Οι αριθμοί

$$c_k = \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx, \quad k=0,1,2,...$$

ονομάζονται συντελεστές $Fourier$ της $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$.

Ορισμός. *Η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k(x)$$

ονομάζεται σειρά $Fourier$ *της συνάρτησης* $f(x)$ *ως προς το σύστημα* $\{\psi_k\}$.

Έστω τώρα έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα** $\{\phi_k\}$ στο (a,b), δηλαδή

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} C\neq 0, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

Το σύστημα $\{\psi_k\}$ με

$$\psi_k = \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|} \ \text{ όπου } \ \|\phi_k\| = \Big(\int_a^b \phi_k^2(x)dx\Big)^{1/2}$$

θα είναι ορθοκανονικό. Πράγματι

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \frac{1}{\|\phi_m\|\|\phi_n\|}\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

Προφανώς

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\|\phi_k\|}\phi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k\phi_k$$

με c_k- συντελεστες $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$ και $\tilde{c}_k = c_k\|\phi_k\|^{-1}$- συντελεστές $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$. Για τα $\tilde{c}_k$ έχουμε

$$\tilde{c}_k = \frac{c_k}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\psi_k\,dx}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\phi_k\,dx}{\|\phi_k\|^2}. \tag{4.1}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύστημα

$$\{\phi_k\}: \qquad 1,\ cos\frac{k\pi}{l}x,\ \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ k=1,2,... \tag{4.2}$$

($\|\phi_0\| = \sqrt{2l}, \ \ \|\phi_k\| = \sqrt{l}, \ \ k = 1, 2, ...$) είναι ορθογώνιο στο $(-l, l)$, ενώ το σύστημα

$$(4.3) \qquad \{\psi_k\}: \qquad \frac{1}{\sqrt{2l}}, \ \ \frac{1}{\sqrt{l}} cos\frac{k\pi}{l}x, \ \ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x, \ \ k = 1, 2, ...$$

είναι ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

Θεωρούμε τους συντελεστές $Fourier$ της συνάρτησης $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$ (βλ. (4.1)):

$$(4.4) \qquad \alpha_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \ \ \beta_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$k = 0, 1, 2, ...$ Η σειρά $Fourier$:

$$(4.5) \qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x\big)$$

ονομάζεται **τριγωνομετρική σειρά** της $f(x)$. Στο εξής την (4.5) θα την ονομάζουμε ή σειρά $Fourier$ ή τριγωνομετρική σειρά.

Παρατηρήση 1. Στο (4.4) συμφωνα με το (4.1) θα έπρεπε να είχαμε γράψει $k = 1, 2, ...$ και $\alpha_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ (αφου $\|\phi_0\|^2 = 2l$) και στη σειρά (4.5) αντι $\alpha_0/2$ θα είχαμε α_0. Το κάνουμε λίγο διαφορετικά για να ορίζουμε τους συντελεστές α_k με ενιαίο τρόπο (4.4) για όλα τα k.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[-l, l]$. Προφανώς η $f(x)$ μπορεί να επεκταθεί περιοδικά στον $\mathbf{R}$ με περίοδο $2l$. Το ερώτημα είναι πότε ισχύει η ισότητα

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x\big)\,?$$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη). *Αν η $f(x)$ είναι φραγμένη περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2l$ και μπορεί να έχει ασυνέχειες μόνο πρώτου είδους, τότε η τριγωνομετρική σειρά της $f(x)$ συγκλίνει σε όλο τον $\mathbf{R}$ και στα σημεία όπου η $f(x)$ είναι συνεχής ισχύει*

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x\big),$$

ενώ στα σημεία όπου η $f(x)$ είναι ασυνεχής ισχύει

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x\big).$$

Π.χ. οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sin x, \ \ x \in [-\pi, \pi], \qquad f(x) = 1 - x^2, \ \ x \in [-1, 1]$$

επαληθευουν τις προυποθέσεις του θεωρήματος αφου τις επεκτείνουμε περιοδικά, την πρώτη με περιοδο 2π και τη δευτερη με περίοδο 2. Επίσης και στις δυο περιπτώσεις οι αντίστοιχες τριγονομετρικές σειρές (σειρες $Fourier$) παριστάνουν τις συναρτήσεις σε όλο τον $\mathbf{R}$. Στην πρώτη περίπτωση η συνάρτηση ήδη είναι γραμμενη σε μορφή τριγωνομετρικής σειράς με $a_k = 0$ $k = 0, 1, 2, ...$ και $b_1 = 1$, $b_k = 0$ $k = 2, ...$

Για την συνάρτηση π.χ.

$$f(x) = x^3, \;\; x \in [-1, 1], \;\; \text{και} \;\; f(x \pm 2) = f(x) \;\; \text{για} \;\; |x| > 1$$

έχουμε οτι η σειρά $Fourier$ της f θα την παριστάνει μόνο στα σημεία όπου η f είναι συνεχής, ενώ στα σημεία ασυνέχειας η σειρά θα ισούται με μηδέν.

Προφανώς η συνάρτηση $f(x) \equiv 1$ παριστάνεται απο την τριγωνομετρική σείρα της (4.5). Πράγματι, χρησιμοποιώντας τους τύπους (4.4) θα έχουμε $\alpha_0 = 2$, $\alpha_k = \beta_k = 0$ για $k = 1, 2, ...$ Μπορούμε να βρούμε τη σειρά $Fourier$ μόνο ως προς τα $\sin$; Η απάντηση είναι *ναι.* Πράγματι, κάνουμε περριτή επέκταση της f στο $[-\pi, 0]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{για} \;\; x \in [0, \pi] \\ -1, & \text{για} \;\; x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

και μετά την επεκτείνουμε περιοδικά με περίοδο 2π. Για την καινούργια συνάρτηση έχουμε ότι η τριγωνομετρική σείρα της παίρνε τη μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$$

με

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\, kx\, dx = \frac{2}{k\pi}[1 - cos\, k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο} \;\; k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν ο} \;\; k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Όμως η σειρά αυτή παριστάνει την $f \equiv 1$ μονο στα σημεία όπου η f είναι συνεχής, δηλαδή σε όλα τα σημεία εκτός απο $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Παράδειγμα 4.1. Να βρεθεί η σειρά $Fourier$ της

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2}, & \text{για} \;\; x \in [-\pi, 0) \\ \frac{\pi - x}{2}, & \text{για} \;\; x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Λύση. Κατ αρχάς παρατηρούμε οτι η $f(x)$ είναι περριτή ως προς το σημείο $x = 0$, πράγματι

$$\text{αν} \;\; x \in (0, \pi] \;\; \text{τότε} \;\; f(-x) = \Big(\frac{-\pi + x}{2} = -\frac{\pi - x}{2} = \Big) - f(x)$$

και για $x \in [-\pi, 0]$ επίσης

$$f(-x) = \Big(\frac{\pi + x}{2} = -\frac{-\pi - x}{2} = \Big) - f(x)$$

Ας κάνουμε την περιοδική επέκταση της f στον $\mathbf{R}$ με περίοδο 2π. Υπολογίζουμε τους συντελεστές $Fourier$. Προφανώς (βλ. (4.4))

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx = 0 \;\; \text{για} \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

ως ολικλήρωμα περριτής συνάρτησης (βλ. Παρατήτηση 3 κάτω). Για β_k έχουμε

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{-\pi - x}{2}\,\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\,\sin kx dx = \frac{1}{k}.$$

Συνεπώς, συμφωνα με την Παρατήρηση 1,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\,kx}{k}\quad \text{εκτός απο τα σημεία}\quad x = 0,\ \pm 2\pi k.$$

Π.χ.

$$f(1) = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}.$$

Παρατηρήση 2. Προφανώς η τριγωνομετρική σειρά θα προκύψει και αν θα θεωρήσουμε την σειρά $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$:

$$\frac{\bar{a}_0}{2\sqrt{l}} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\bar{a}_k\frac{1}{\sqrt{l}}cos\frac{k\pi}{l}x + \bar{b}_k\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\big)$$

όπου

$$\bar{a}_k = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{-l}^{l} f(x)\,cos\frac{k\pi}{l}xdx,\ \ \bar{b}_k = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Παρατηρήση 3. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν η $f(x)$ είναι περιττή ως προς το σημείο $x = 0$, τότε $\alpha_k = 0$ για κάθε k.

Πράγματι (βλ. και το Παράδειγμα 4.1), το ολοκλήρωμα από $-l$ εως l μιας περιττής ως προς το $x = 0$ συνάρτησης είναι μηδέν. Το $\cos\frac{k\pi}{l}x$ είναι άρτια ως προς το $x = 0$ συνάρτηση. Το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός ότι γινόμενο άρτιας ($\cos$) και περιττής (f) συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.2. Αποδείξτε οτι η ακόλουθη σειρά συγκλίνει για κάθε x

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\,kx}{k^2}.$$

Λύση. Προφανώς για τυχαίο x_0 έχουμε

$$\Big|\frac{\sin\,kx_0}{k^2}\Big| \le \frac{1}{k^2}.$$

Το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός οτι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

είναι συγκλίνουσα (κριτήριο λόγου $d'Alembert$). Εδω μάλιστα έχουμε απόλυτή σύγκλιση.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι αν η $f(x)$ είναι άρτια ως προς το σημείο $x = 0$, τότε στη σειρά (4.5) $\beta_k = 0$ για κάθε k.

2. Διαπιστώστε ότι το σύστημα (4.2) είναι όντως ορθογώνιο στο $(-l, l)$ και το σύστημα (4.3) ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

3. Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\, kx}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin\, kx|}{k}.$$

Αποδείξτε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει για κάθε x, ενω η δεύτερη αποκλίνει.

Υπόδειξη: i. Παρατηρήστε ότι

$$S_n = \sin\, x + \sin\, 2x + \cdots + \sin\, nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad |S_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

και μετά χρησιμοποιήστε το κριτήριο $Dirichlet$.

ii. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα

$$\frac{|\sin\, kx|}{k} \geq \frac{1}{2k}(1 - \cos\, 2nx) = \frac{1}{2k} - \frac{\cos\, 2kx}{2k}.$$

4. Αποδείξτε ότι για $x \in (0,\, 2\pi)$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\, nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

§5. Μέθοδος Fourier για κυματική εξίσωση.

Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για την κυματική εξίσωση: Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T = \{(t,x) : |t| < \infty, \ 0 < x < l\}$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u(0,x) = \phi(x), \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t), \ u(t,l) = \mu_2(t) \text{ για } |t| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f(t,x) \in C^1((-T,T) \times [0,l]) \ \forall T > 0, \ \phi(x) \in C^2([0,l]), \ \psi(x) \in C^1([0,l])$$

και

$$\phi(0) = \mu_1(0), \ \psi(0) = \mu_1'(0), \ \phi(l) = \mu_2(0), \ \psi(l) = \mu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(t,x) = \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Προφανώς για $v(t,x) = u(t,x) - h(t,x)$ έχουμε

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - \big(h_{tt} - h_{xx}\big) =$$

$$f(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1''(t) + \frac{x}{l}\mu_2''(t) = f_1(t,x)$$

και

$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad \forall t,$$

επίσης

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(0) + \frac{x}{l}\mu_2(0),$$

$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1'(0) + \frac{x}{l}\mu_2'(0),$$

$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Αρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l \tag{5.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{5.3}$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T \tag{5.4}$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (5.4) και παίρνουμε

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{για κάθε } t \text{ και } x$$

συνεπώς

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά. Άρα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \tag{5.5}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{5.6}$$

Αν $\lambda \leq 0$, τότε $X(x) \equiv 0$. Πράγματι, για $\lambda < 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

και για $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Και στις δυο περιπτώσεις οι συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ μας δίνουν $C_1 = C_2 = 0$. Τωρα για $\lambda > 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\, cos\sqrt{\lambda}x,$$

από τις συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ προκύπτει ότι

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

άρα $\sqrt{\lambda}l = \pi k$ (αφού θέλουμε $X(x) \not\equiv 0$). Συνεπώς για

$$\lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2, \quad k = 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (5.5):

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (5.6) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big) \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (5.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (5.3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (5.2). Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ περιττά στο $(-l, 0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$. Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{5.7}$$

(αφου ϕ και ψ περιττές ως προς $x = 0$) όπου

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(x) \sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} \phi(x) \sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \psi(x) \sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} \psi(x) \sin\frac{k\pi}{l}xdx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{5.8}$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t,x)$ επαλήθεύει την εξίσωση (5.4) και τις συνοριακές συνθήκες (5.3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (5.2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k = a_k.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}B_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_k = \frac{l}{k\pi}b_k.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (5.4), (5.2), (5.3) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{5.9}$$

Η απόδειξη της σύγκλισης της σειράς (5.9) και των σειρών:

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[-\frac{k\pi}{l}a_k \sin\frac{k\pi}{l}t + b_k\, cos\frac{k\pi}{l}t\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t\Big]\frac{k\pi}{l}cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

θα δοθεί στο μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους.

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(0,x) = \sin x + \sin 4x, \quad u_t(0,x) = \sin x + \sin 2x,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = \sin x + \sin 4x,$$

$$\psi(x) = \sin x + \sin 2x.$$

Συνεπώς $a_1 = 1$, $a_4 = 1$, $a_k = 0$ για $k \neq 1,4$ $b_1 = b_2 = 1$, $b_k = 0$ για $k > 2$. Αρα η λύση είναι

$$u(t,x) = (cos\, t + \sin t)\sin x + \frac{1}{2}\sin 2t \sin 2x + cos\, 4t \sin 4x.$$

Για τον υπολογισμό των a_k, b_k προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους στην προηγούμενη σελίδα (φυσικά με το ίδιο αποτέλεσμα), αυτο ομως στην προκειμένει περίπτωση δεν είναι απαραίτητο αφου οι ϕ και ψ είναι ήδη γραμμένες σε μορφή σειράς $Fourier$.

Συνοψίζοντας παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση $u(t,x)$ για κάθε σταθεροποιημένο t σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{5.10}$$

(βλ. (5.8)) και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (5.10) στην (5.4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (5.2).

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (5.1)-(5.3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (5.10). Πρώτα γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{5.11}$$

όπου

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x)\, \sin \frac{k\pi}{l} x\, dx.$$

Παρατήρηση 1. Η ισότητα (5.11) εν γένει ισχύει μόνο για $x \in (0,l)$ και οχι για $x = 0$, $x = 1$ οπου η σειρά $Fourier$ μπορεί να μην παριστάνει την f (βλ. σελ. 84-85). Αυτο δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα επειδή η εξίσωση (5.1) θέλουμε να επαληθευεται για $x \in (0,l)$ και όχι για $x \in [0,l]$.

Έστω ότι η σειρά (5.10) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (5.10) στην εξίσωση (5.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (5.11) έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = f_k(t). \tag{5.12}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε (βλ. (5.7))

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

δηλαδή

$$u_k(0) = a_k, \;\; u_k'(0) = b_k. \tag{5.13}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (5.12) είναι

$$u_k(t) = C_{1k} cos \frac{k\pi}{l} t + C_{2k} \sin \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} \int_0^t f_k(\tau)\, \sin \frac{k\pi}{l}(t-\tau) d\tau, \tag{5.14}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (5.13), πρέπει

$$C_{1k} = a_k, \;\; C_{2k} = \frac{l}{k\pi} b_k.$$

Πράγματι άπο (5.14), (5.13) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k, \;\; u_k'(0) = \frac{k\pi}{l} C_{2k} = b_k.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (5.12), (5.13) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,$$

$k = 1, 2, \ldots.$ και η λύση του προβλήματος $Cauchy-Dirichlet$ για την εξίσωση (5.1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{5.15}$$

υπό την προϋπόθεση οτι και η δεύτερη σειρά στην σχέση (5.15) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν θα παραγωγίσουμε την δεύτερη σειρά όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t (η απόδειξη της σύγκλισης είναι παρόμοια με αυτήν των σειρών (5.7), (5.8)).

Παρατήρηση 2. Επειδή είναι δύσκολο να θυμάται κανείς τον τύπο (5.15) καλύτερα να θυμάστε την διαδικασία η οποία μας οδήγησε σε αυτόν.

Παράδειγμα 5.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\,x,\ \ (t,x) \in (-\infty,\infty)\times(0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \sin\,x,\ \ u_t(0,x) = \sin 3x,\ \ x \in (0,\pi).$$

Λύση. Αντικαθιστόντας την σειρα

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\,kx$$

στην εξίσωση για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_1'' + u_1 = 1,\ \ u_1(0) = 1,\ \ u_1'(0) = 0,$$
$$u_3'' + 9u_3 = 0,\ \ u_3(0) = 0,\ \ u_3'(0) = 1,$$
$$u_k'' + k^2u_k = 0,\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0,\ \ k \neq 1,3.$$

Άρα

$$u_1(t) \equiv 1,\ \ u_3(t) = \frac{1}{3}\sin 3t,\ \ u_k(t) \equiv 0\ \ k \neq 1,3$$

και

$$u(t,x) = \sin\,x + \frac{1}{3}\sin 3t\,\sin 3x.$$

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν θα αντικαταστήσουμε στην σειρά (3.15) $a_1 = 1, a_k = 0$ για $k > 1$, $b_3 = 1$, $b_k = 0$ για $k \neq 3$, $f_1 = 1$, $f_k = 0$ για $k > 1$.

Παράδειγμα 5.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1\ \text{ στο }\ Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ \ u(0,x) = u_t(0,x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, άρα $a_k = b_k = 0\ \forall k$ και (από τον τύπο 4.15)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Αφού $f(t,x) \equiv 1$, έχουμε

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\,kx\,dx = \frac{2}{k\pi}[1-cos\,k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν ο } k - \text{περιττός,}\end{cases}$$

Συνεπώς η λύση είναι

$$u(t,x) = \sum_{k=1(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\int_0^t \sin\,k(t-\tau)\,d\tau\,\sin\,kx =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-cos(2m+1)t}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)x.$$

Ή αλλιώς αντικαθιστούμε την σειρά

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\,kx$$

στην εξίσωση, για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_k'' + k^2 u_k = 0,\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0,\ \ k = 2m,\ \ m = 1,2,...,$$

$$u_k'' + k^2 u_k = \frac{4}{k\pi},\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0,\ \ k = 2m+1,\ \ m = 1,2,...\ .$$

Συνεπώς

$$u_k \equiv 0,\ \ k = 2m,\ \ m = 1,2,...,$$

$$u_k = \frac{4}{\pi k^3}(1-cos\,kt),\ \ k = 2m+1,\ \ m = 1,2,...\ ,$$

Άρα

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-cos(2m+1)t}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)x.$$

Παρατήρηση 3. Όπως ήδη είχε αναφερθεί (σελ. 85) η συνάρτηση $f(x) \equiv 1$ παριστάνεται απο την τριγωνομετρική σειρά της (4.5) (με $\alpha_0 = 2$, $\alpha_k = \beta_k = 0$ για $k = 1,2,...$). Στο προηγούμενο παράδειγμα όμως αυτη η σειρά δεν μας βολέυει, θέλουμε να βρούμε μια σειρά μόνο ως προς τα $\sin$ (βλ. σελίδα 85).

Παράδειγμα 5.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\,x + 2,\ \ (t,x) \in (-\infty,\infty)\times(0,\pi),$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = t^2,\qquad t \in (-\infty,\infty),$$

$$u(0,x) = \sin x,\ \ u_t(0,x) = \sin 3x,\ \ x \in (0,\pi).$$

Λύση. Εφόσον οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v = u - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t^2 - \frac{x}{\pi}t^2 = u - t^2 \ \ (u = v + t^2).$$

Έχουμε

$$v_{tt} - v_{xx} = \sin\, x, \ \ (t,x) \in (-\infty,\infty) \times (0,\pi),$$
$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0, \qquad t \in (-\infty,\infty),$$
$$v(0,x) = \sin x, \ \ v_t(0,x) = \sin 3x, \ \ x \in (0,\pi).$$

Άρα (βλ. Παράδειγμα 5.2)

$$v(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x$$

και

$$u(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x + t^2.$$

Παρατήρηση 4. Προφανώς μπορούμε να ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ ως προς ορθοκανονικό σύστημα ψ_k (βλ. (4.3)) δηλαδή σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι $u_k(t)$ προσδιορίζονται απο την (5.12) όμως με

$$f_k(t) = \frac{2}{\sqrt{l}}\int_0^l f(t,x)\, \sin\frac{k\pi}{l}x\, dx.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (5.1) - (5.3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x), \ \ u(t,0) = u(t,l) = 0,$$
$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \ \ v_t(0,x) = \psi(x), \ \ v(t,0) = v(t,l) = 0.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$w(0,x) = w_t(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0.$$

Για την

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^l \big(w_t^2 + w_x^2\big)dx$$

έχουμε

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \big(w_t w_{tt} + w_x w_{xt}\big)dx =$$
$$\int_0^l w_t w_{tt}\, dx + w_x w_t\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l w_t w_{xx}\, dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx = 0.$$

Εδω χρησιμοποιήσαμε οτι $w_t(t,0) = w_t(t,l) = 0$ (επειδή $w(t,0) = w(t,l) = 0$). Προφανώς $E(0) = 0$, άρα $E(t) = 0$ (αφού και $E'(t) = 0$), τουτ έστιν

$$w_t(t,x) = w_x(t,x) = 0.$$

Συνεπώς η w είναι σταθερά και επειδή $w\Big|_{t=0} = 0$ έχουμε $w \equiv 0$ δηλαδή $u \equiv v$.

Ασκήσεις.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

1.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ για }\; |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \quad u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \;\; 0 < x < \pi.$$

2.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\sin\, x + \sin 2x + \sin 3x \;\text{ για }\; |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = 0 \quad u_t(0,x) = 0 \;\; 0 < x < \pi.$$

3.

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}\sin\, x \;\text{ για }\; |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \quad u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \;\; 0 < x < \pi.$$

4.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\big(1 - \frac{2x}{\pi}\big) \;\text{ για }\; |t| < \infty, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = t^2 \;\text{ για }\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u_t(0,x) = \sin\, x \;\text{ για }\; 0 < x < \pi.$$

5.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\frac{x}{\pi} \;\text{ για }\; |t| < \infty, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = 0, \;\; u(t,\pi) = t^2 \;\text{ για }\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, 2x, \;\; u_t(0,x) = \sin\, 3x \;\text{ για }\; 0 < x < \pi.$$

6. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ανάγετε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \;\text{ για }\; |t| < \infty, \;\; a < x < b,$$
$$u(t,a) = u(t,b) = 0 \;\text{ για }\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\text{ για }\; a < x < b.$$

στο πρόβλημα (5.1)-(5.3)

§6. Συνοριακές συνθήκες Neumann

Συνοπτικά θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $Fourier$ στην περίπτωση συνοριακών συνθηκών **Neumann**. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l,$$
$$u_x(t,0) = \nu_1(t), \quad u_x(t,l) = \nu_2(t) \text{ για } |t| < \infty$$

με

$$\phi'(0) = \nu_1(0), \quad \psi'(0) = \nu_1'(0), \qquad \phi'(l) = \nu_2(0), \quad \psi'(l) = \nu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\nu_1(t) \equiv \nu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(t).$$

Προφανώς

$$v_{tt} - v_{xx} = f_1(t,x) \equiv$$
$$f(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1''(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2''(t) - \frac{1}{l}\nu_1(t) + \frac{1}{l}\nu_2(t)$$

και

$$v_x(t,0) = v_x(t,l) = 0 \ \ \forall t,$$

επίσης

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(0),$$
$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1'(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2'(0),$$
$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \qquad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T \tag{6.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l \tag{6.2}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{6.3}$$

με

$$\phi'(0) = \phi'(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T \tag{6.4}$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Παρομοίως με την προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(l) = 0 \tag{6.5}$$

και

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{6.6}$$

Για

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (6.5):

$$X_k(x) = cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (6.6) μας δίνει

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t \ \text{ αν } \ k = 0$$

και

$$T_k(t) = A_k \, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t \ \text{ για } \ k = 1, 2, ...,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k \, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big)cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (6.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (6.3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (6.2). Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ άρτια στο $(-l, 0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$. Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t,x)$ επαλήθεύει την εξίσωση (6.4) και τις συνοριακές συνθήκες (6.3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (6.2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \text{ και } A_k = a_k \text{ για } k > 1.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_0 = \frac{b_0}{2},\quad B_k = \frac{l}{k\pi} b_k \text{ για } k = 1, 2, ...$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (6.4), (6.2), (6.3) δίνεται από τον τύπο

$$(6.7)\qquad u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t] cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 6.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(0,x) = cos\, x,\quad u_t(0,x) = cos\, 2x,$$
$$u_x(0,x) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = cos\, x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\, kx,$$

$$\psi(x) = cos\, 2x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\, kx,$$

άρα $a_1 = 1$, $a_i = 0$ για $i \neq 1$, $b_2 = 1$, $b_j = 0$ για $j \neq 2$. Συνεπώς η συνάρτηση

$$u(t,x) = cos\, t\, cos\, x + \frac{1}{2}\sin\, 2t\, cos\, 2x$$

είναι λύση του προβλήματος.

Παρομοίως με την περίπτωση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{6.8}$$

και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (6.8) στην (6.4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (6.2)

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (6.1) - (6.3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (6.8). Γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή (βλ. Παρατήτηση 2 στο τέλος της παραγράφου)

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x \tag{6.9}$$

όπου

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\, cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \ \text{ για } \ k = 1, 2, ...$$

Έστω ότι η σειρά (6.8) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (6.8) στην εξίσωση (6.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (6.9) έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = f_k(t). \tag{6.10}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

δηλαδή

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \ \ u_0'(0) = \frac{b_0}{2}, \ \ u_k(0) = a_k, \ \ u_k'(0) = b_k \text{ για } \ k = 1, 2, ... \tag{6.11}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (6.10) είναι

$$u_0(t) = C_{10} + C_{20}t + \int_0^t \int_0^\tau f_0(\xi) d\xi d\tau,$$

(6.12)

$$u_k(t) = C_{1k}cos\frac{k\pi}{l}t + C_{2k}\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)d\tau,\;\; k = 1,2,...$$

Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (6.11), πρέπει

$$C_{10} = \frac{a_0}{2},\;\; C_{20} = \frac{b_0}{2},\;\; C_{1k} = a_k,\;\; C_{2k} = \frac{l}{k\pi}b_k \;\text{ για }\; k = 1,2,....$$

Πράγματι άπο (6.11), (6.12) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k,\;\; u_k'(0) = \frac{k\pi}{l}C_{2k} = b_k.$$

Αρα η λύση του προβλήματος (6.10), (6.11) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_0(t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau,$$

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,\;\; k = 1,2,...$$

και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Neumann$ για την εξίσωση (6.1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\Big]cos\frac{k\pi}{l}x +$$

$$(6.13)\qquad \int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 6.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\,x \;\text{ στο }\; Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,$$

$$u(0,x) = 3\cos 3x,\;\; u_t(0,x) = \cos 2x.$$

Λύση. Έχουμε $f_1 = 1$, $a_3 = 3$, $b_2 = 1$ τα υπόλοιπα μηδέν, άρα (βλ. (6.13))

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\,2x + 3cos\,3t\,cos3x + (1 - cos\,t)cos\,x.$$

Ή αλλιώς

$$u_1''(t) + u_1(t) = 1,\;\; u_1(0) = 0,\;\; u_1'(0) = 0,$$

$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 0,\;\; u_2(0) = 0,\;\; u_2'(0) = 1,$$

$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 0,\;\; u_3(0) = 3,\;\; u_3'(0) = 0$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_k(t) = 0,\;\; u_k(0) = 0,\;\; u_k'(0) = 0\;\; k \neq 1,2,3.$$

Προφανώς

$$u_1 = 1 - cos\,t,\;\; u_2 = \frac{1}{2}\sin\,2t,\;\; u_3 = 3cos\,3t,\;\; u_k \equiv 0\;\; k \neq 1,2,3.$$

συνεπώς

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x.$$

Παράδειγμα 6.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\, x + 2x - \pi \ \text{ στο } \ Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = t^2,$$

$$u(0,x) = 3cos3x, \ \ u_t(0,x) = cos2x.$$

Λύση. Αφού οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδέν εισάγουμε την συνάρτηση

$$v = u + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t^2 - \frac{x^2}{2\pi} t^2$$

η οποία επαλήθεύει την εξίσωση

$$v_{tt} - v_{xx} = cos\, x$$

και τις συνθήκες

$$u(0,x) = 3cos3x, \ \ u_t(0,x) = cos2x, \ \ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,$$

άρα (βλ. Παράδειγμα 6.2)

$$v = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x,$$

και

$$u = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x + \big(x - \frac{\pi}{2}\big) t^2.$$

Παράδειγμα 6.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \ \text{ στο } \ Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(0,x) = 2, \ \ u_t(0,x) = 1/2,$$

$$u_x(0,x) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) \equiv 2 = a_0/2, \ \ \psi(x) \equiv 1/2 = b_0/2,$

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{4+t}{2} + \int_0^t \int_0^{\tau} 1 d\xi\, d\tau = \frac{t^2 + t + 4}{2}.$$

Παρατήρηση 1. Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση συνοριακών συνθηκών

$$\alpha_1 u_x(t,0) + \alpha_2 u(t,0) = \nu_1(t), \ \ \beta_1 u_x(t,l) + \beta_2 u(t,l) = \nu_2(t),$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \ \ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Παρατήρηση 2. Προφανώς αντί (6.9) θα μπορούσαμε να την γράψουμε την f σε μορφή

$$f(t,x) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) cos \frac{k\pi}{l} x$$

όπου

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x)\, cos \frac{k\pi}{l} x \, dx \;\; \text{για} \;\; k = 0,1,2,...$$

(βλ. § 4).

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (6.1) - (6.3).

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

2.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\; \text{για} \;\; |t| < \infty, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \;\; \text{για} \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos x + \cos 3x, \;\; u_t(0,x) = 2\cos 2x + \cos 4x \;\; \text{για} \;\; 0 < x < \pi.$$

3.

$$u_{tt} - u_{xx} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x \;\; \text{για} \;\; |t| < \infty, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \;\; \text{για} \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos x, \;\; u_t(0,x) = 0 \;\; \text{για} \;\; 0 < x < \pi.$$

4.

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos t \;\; \text{για} \;\; |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 1 - \cos t, \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \;\; 0 < x < \pi.$$

§7. Εξίσωση Θερμότητας, μέθοδος *Fourier*

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \text{ για } t > 0,\ \ 0 < x < l \tag{7.1}$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x),\ \ 0 < x < l, \tag{7.2}$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = u(t,l) = 0,\ \ t > 0. \tag{7.3}$$

Εδώ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα. Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $Fourier$. Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{7.4}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (7.4) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (7.4) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t. Προφανώς

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (7.1) σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x) \sin\frac{k\pi}{l}x\, dx$$

και αντικαθιστώντας την (7.4) στην (7.1) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα θέλουμε να ισχύει

$$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = f_k(t),\ \ k = 1,2,... \tag{7.5}$$

Επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) \sin\frac{k\pi}{l}x\, dx,$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (7.2) πρέπει να ισχύει

$$u_k(0) = a_k,\ \ k = 1,2,... \tag{7.6}$$

Πράγματι

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\, \sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Έστω $f(t,x) \equiv 0$, τότε

$$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{7.7}$$

και η λύση του προβλήματος (7.7), (7.6) είναι

$$u_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) για $f(t,x) \equiv 0$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{7.8}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν ακολουθήσουμε την διαδικασία με την οποια ξεκινήσαμε στην §5 : ψάχνουμε αν υπάρχει λύση της $u_t - u_{xx} = 0$ της μορφής $T(t)X(x) \not\equiv 0$. Πρέπει να ισχύει

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Η $X(x)$ θα είναι λύση του προβλήματος (5.5) αρα

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \;\text{ και }\; X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Για την $T(t)$ θα έχουμε

$$T'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0$$

αρα

$$T_k(t) = A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Την αυθαίρετη σταθερά A_k την προσδιορίζουμε απο την αρχική συνθήκη και έχουμε:

$$A_k = a_k.$$

Παρατηρούμε οτι για $t < 0$ η σειρά (7.8) σίγουρα αποκλίνει, ενω για $t > 0$ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την σύγκλιση της. Αυτός είναι ο λόγος γιατί την εξίσωση θερμότητας (σε αντίθεση με την κυματική) την μελετάμε για $t > 0$.

Παράδειγμα 7.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = 0 \;\text{ για }\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \sin x, \;\; u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, συνεπώς απο (7.8)

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x.$$

Ή αλλιώς απο (7.5), (7.6)

$$u_1' + u_1 = 0, \;\; u_1(0) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; u_1 = e^{-t},$$

και για $k > 1$
$$u_k' + k^2 u_k = 0, \;\; u_k(0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; u_k \equiv 0.$$

Έστω τώρα $f(t, x) \not\equiv 0$. Η γενική λύση της (7.5) είναι
$$u_k(t) = C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} + e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau,$$
και την αυθαίρετη σταθερά C_k την προσδιορίζουμε άπο την (7.6):
$$u_k(0) = C_k = a_k.$$
Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) δίνεται από τον τύπο
(7.9)
$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau \sin\frac{k\pi}{l}x$$
(πάντα υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t).

Παράδειγμα 7.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος
$$u_t - u_{xx} = \sin 2x + 1 - \frac{x}{\pi} \;\; \text{για} \;\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi$$
$$u(t, 0) = t, \;\; u(t, \pi) = 0,$$
$$u(0, x) = \sin x.$$

Λύση. Για την
$$v(t, x) = u(t, x) - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t$$
έχουμε
$$v_t - v_{xx} = \sin 2x \;\; \text{για} \;\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi$$
$$v(t, 0) = v(t, \pi) = 0,$$
$$v(0, x) = \sin x.$$
Λύνουμε αυτό το πρόβλημα. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, επίσης $f_1 = 0$, $f_2 = 1$ και $f_k = 0$ για $k > 2$. Άρα έχουμε για την v_1:
$$v_1'(t) + v_1(t) = 0, \;\; v_1(0) = 1,$$
για την v_2:
$$v_2'(t) + 4v_2(t) = 1, \;\; v_2(0) = 0,$$
για τις v_k, $k > 2$:
$$v_k'(t) + k^2 v_k(t) = 0, \;\; v_k(0) = 0.$$
Συνεπώς
$$v_1(t) = e^{-t}, \;\; v_2(t) = \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big), \;\; v_k(t) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; k > 2.$$
Η λύση του προβλήματος (για την v) είναι
$$v(t, x) = e^{-t} \sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big) \sin 2x,$$

και η λύση του αρχικού προβλήματος

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big)\sin 2x + \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t.$$

Παράδειγμα 7.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = t, \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \sin x, \ \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Προφανώς $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$ και

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin kx\,dx = t\frac{2}{k\pi}[1 - cos\,k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } \ k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}t, & \text{αν ο } \ k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Έχουμε για την u_1:

$$u_1'(t) + u_1(t) = \frac{4t}{\pi}, \ \ u_1(0) = 1,$$

για τις u_k με $k = 3, 5, 7...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = \frac{4t}{k\pi}, \ \ u_k(0) = 0,$$

για τις u_k με $k = 2, 4, 6, ...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$u_1(t) = e^{-t} + \frac{4}{\pi}(t - 1 + e^{-t}),$$

$$u_k(t) = \frac{4}{k^3\pi}\Big(t - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}e^{-k^2 t}\Big), \ \text{ για } \ k = 3, 5, 7, ...,$$

$$u_k(t) = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 4, 6, ...$$

Άρα λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) =$$

$$\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big)\sin x +$$

$$\sum_{k=3(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{k^5\pi}\big(k^2 t - 1 + e^{-k^2 t}\big)\sin kx =$$

$$\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big)\sin x +$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5}\sin(2m+1)x =$$

$$e^{-t}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5}\sin(2m+1)x.$$

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (7.1) με αρχική συνθήκη (7.2) και τις συνοριακές συνθήκες $Neumann$ (θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα)

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad t > 0. \tag{7.10}$$

Παρομοίως με την κυματική εξίσωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{7.11}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (7.11) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (7.11) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή μια ως προς t. Κάνουμε άρτια και έπειτα περιοδική επέκταση των f και ϕ. Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (7.1) σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \qquad k = 1,2,...$$

και αντικαθιστώντας την (7.9) στην (7.1) παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big)cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα προσδιορίζουμε τις $u_k(t)$ από την (7.5) (με $k = 0,1,2,...$), επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)cos\frac{k\pi}{l}x\, dx, \quad k = 0,1,2,...$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (7.2) πρέπει να ισχύει

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \quad u_k(0) = a_k \ \text{ για } \ k = 1,2,....$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1), (7.2), (7.10) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} cos\frac{k\pi}{l}x + \int_0^t f_0(\tau)d\tau +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 7.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = cos\,3x \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \ \ u(0,x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_k = 0\ \forall k$, επίσης $f_3 = 1$ και $f_k = 0$ για $k \neq 3$. Άρα έχουμε για την u_3:

$$u_3'(t) + 9u_3(t) = 1, \quad u_3(0) = 0,$$

και

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0,$$

για $k \neq 3$. Συνεπώς

$$u_k(t) \equiv 0 \ \text{ για } \ k \neq 3, \ \ u_3(t) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big).$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x.$$

Παράδειγμα 7.5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \cos 3x + \frac{t}{\pi} - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2$$
$$u_x(t,0) = t, \ \ u_x(t,\pi) = 0,$$
$$u(0,x) = 0.$$

Λύση. Για την

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \cos 3x,$$
$$v_x(0,x) = 0, \ \ v_x(t,\pi) = 0,$$
$$v(0,x) = 0.$$

Η λύση αυτού του προβλήηματος είναι (βλ. παράδειγμα 7.4)

$$v(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u(t,0) = u(t,l) = 0,$$
$$v_t - v_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \ \ v(t,0) = v(t,l) = 0.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$w_t - w_{xx} = 0 \ \text{ στο } \ Q_T, \tag{7.12}$$
$$w(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (7.12) με w και ολοκληρώνουμε ως προς x:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx - \int_0^l w_{xx} w dx = 0.$$

Ολοκληρώνοντας κατα μερη παιρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2dx - w_x w\Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

άρα

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2dx + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή ως προς t απο το μηδέν και έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^l w^2dx + \int_0^t\int_0^l w_x^2 dx d\tau = 0,$$

συνεπώς $w = 0$, δηλαδή $u = v$.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του του προβλήματος (7.1), (7.10), (7.3) είναι ίδια.

Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε την αντικατάσταση η οποία ανάγει την εξίσωση

$$u_t - ku_{xx} = f(t,x), \quad k > 0 \ \text{ σταθερά}$$

στην εξίσωση

$$u_t - u_{yy} = f(t,y).$$

2. Εστω οτι η $u(t,x)$ είναι λύση της εξίσωσης (7.1) η οποια επαληθευει την αρχική συνθήκη (7.2) και συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t).$$

Προσδιορίστε την εξίσωση και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που επαληθευει η συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) - \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των προβλημάτων:

3.

$$u_t - u_{xx} = t^2 \sin x \ \text{ για } \ t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ t > 0,$$
$$u(0,x) = \sin 2x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi.$$

4.

$$u_t - u_{xx} = 2\sin x \cos x \ \text{ για } \ t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ t > 0,$$
$$u(0,x) = \sin x + \sin 3x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi.$$

5.

$$u_t - u_{xx} = \frac{\pi - x}{2} \ \text{ για } \ t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \text{ για } t > 0,$$
$$u(0,x) = 0 \text{ για } 0 < x < \pi.$$

Υπόδειξη: (βλ. άσκηση 4 §4. σελίδα 85)

6.

$$u_t - u_{xx} = \frac{t^2}{2}\cos x \text{ για } t > 0, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \text{ για } t > 0,$$
$$u(0,x) = \cos x \text{ για } 0 < x < \pi.$$

7.

$$u_t - u_{xx} = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi}, \text{ για } t > 0, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = 0, \;\; u_x(t,\pi) = t \text{ για } t > 0,$$
$$u(0,x) = \frac{1}{2}\cos x \text{ για } 0 < x < \pi.$$

§8. Εξίσωση $Laplace$, μέθοδος $Fourier$

Θα εφαρμόσουμε τωρα την μέθοδο $Fourier$ για την εξίσωση $Laplace$ όταν το χωρίο είναι ένα ορθογώνιο. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα $Dirichlet$:

$$\begin{gathered} v_{xx} + v_{yy} = \tilde{f}(x,y) \;\text{ στο }\; (0,l)\times(0,l_1), \\ v(0,y) = h_1(y), \;\; v(l,y) = h_2(y) \;\text{ για }\; y\in[0,l_1], \\ v(x,0) = \tilde{\phi_1}(x), \;\; v(x,l_1) = \tilde{\phi_2}(x) \;\text{ για }\; x\in[0,l], \end{gathered}$$

με

$$\tilde{\phi_1}(0) = h_1(0), \tilde{\phi_1}(l) = h_2(0), \tilde{\phi_2}(0) = h_1(l_1), \tilde{\phi_2}(l) = h_2(l_1).$$

Υποθέτουμε οτι οι h_i είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε $h_1 \equiv h_2 \equiv 0$. Πράγματι, εισάγουμε την συνάρτηση

$$u = v - \Big[\frac{l-x}{l}h_1(y) + \frac{x}{l}h_2(y)\Big]$$

για την οποία έχουμε

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \;\text{ στο }\; (0,l)\times(0,l_1), \tag{8.1}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0 \;\text{ για }\; y\in[0,l_1], \tag{8.2}$$

$$u(x,0) = \phi_1(x), \;\; u(x,l_1) = \phi_2(x) \;\text{ για }\; x\in[0,l], \tag{8.3}$$

με

$$f(x,y) = \tilde{f} - \Big[\frac{l-x}{l}h_1''(y) + \frac{x}{l}h_2''(y)\Big]$$

και

$$\begin{gathered} \phi_1(x) = \tilde{\phi_1}(x) - \Big[\frac{l-x}{l}h_1(0) + \frac{x}{l}h_2(0)\Big], \;\; \phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \\ \phi_2(x) = \tilde{\phi_2}(x) - \Big[\frac{l-x}{l}h_1(l_1) + \frac{x}{l}h_2(l_1)\Big], \;\; \phi_2(0) = \phi_2(l) = 0. \end{gathered}$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(x,y) \equiv 0$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\text{ στο }\; (0,l)\times(0,l_1), \tag{8.4}$$

Ψάχνουμε τη λύση της εξίσωσης (8.4) σε μορφή

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{8.5}$$

αντικαθιστώντας την (8.5) στην (8.4) παίρνουμε

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

διαιρώντας δια XY έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \;\; \lambda\in\mathbf{R}. \tag{8.6}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες (8.2) για την συνάρτηση $X(x)$ προκύπτει το εξής πρόβλημα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; x\in(0,l), \;\; X(0) = X(l) = 0.$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε, μη τετριμμένες λύσεις υπάρχουν μόνο για

$$\lambda = \lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

και δίνονται ως

$$X(x) = C\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad C - \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

Επίσης από την (8.6) έχουμε

$$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0 \quad y \in [0, l_1],$$

προφανώς η γενική λύση της άνω εξίσωσης είναι

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}, \quad A_k,\, B_k - \text{αυθαίρετες σταθερές.}$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \Big(A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}\Big)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

επαληθεύουν την εξίσωση (8.4) και τις συνθήκες (8.2). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$$

υπό την προϋπόθεση ότι συγκλίνει και οι παράγωγοι όρο προς όρο πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x και y επίσης συγκλίνουν. Για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (8.3) θα ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία, γράφουμε

$$\phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi_1(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x dx,$$

και

$$\phi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi_2(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Θέλουμε να ισχύει το εξής

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,l_1) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{\frac{k\pi l_1}{l}} + B_k e^{\frac{-k\pi l_1}{l}})\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

άρα πρέπει

$$A_k + B_k = a_k, \quad \text{και} \quad A_k e^{\frac{k\pi l_1}{l}} + B_k e^{\frac{-k\pi l_1}{l}} = b_k.$$

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις ας πάρουμε $l_1 = l$, τότε

$$A_k = \frac{a_k - e^{k\pi}b_k}{1 - e^{2k\pi}}, \quad B_k = \frac{b_k - a_k e^{k\pi}}{1 - e^{2k\pi}}e^{k\pi}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (8.4), (8.2), (8.3) (για $l_1 = l$) δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{a_k - e^{k\pi} b_k}{1 - e^{2k\pi}} e^{\frac{k\pi}{l} y} + \frac{b_k - a_k e^{k\pi}}{1 - e^{2k\pi}} e^{k\pi} e^{-\frac{k\pi}{l} y} \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

(υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y). Ευκολα κατασκευάζουμε τη λύση και για $l_1 \neq l$.

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν εξ αρχής θα ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{8.7}$$

Παράδειγμα 8.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.4), (8.2), (8.3) με

$$l = l_1 = \pi, \ \phi_1 \equiv 0 \,\text{και}\, \phi_2 = \sin\, x.$$

Λύση. Προφανώς $a_k = 0 \ \forall k$, $b_1 = 1$ και $b_k = 0$ για $k \geq 2$ άρα

$$u(x,y) = \frac{e^{\pi}\big(e^{-y} - e^{y}\big)}{1 - e^{2\pi}} \sin\, x.$$

* * *

Έστω τώρα $f(x,y) \not\equiv 0$. Γράφουμε την f σε μορφή σειράς $Fourier$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{8.8}$$

όπου

$$f_k(y) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,y) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή (8.7). Αντικαθιστώντας την (8.7) στην (8.1) και λαμβάνοντας υπ΄ οψιν την (8.8) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(Y_k''(y) - \frac{k^2\pi^2}{l^2} Y_k(y) \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Συνεπώς για τον προσδιορισμό των $Y_k(y)$ έχουμε

$$Y_k''(y) - \frac{k^2\pi^2}{l^2} Y_k(y) = f_k(y)$$

και

$$Y_k(0) = a_k, \ \ Y_k(l_1) = b_k.$$

Παράδειγμα 8.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.1), (8.2), (8.3) με

$$l = \pi, \ l_1 = 1, \ \phi_1 = \sin\, 2x, \ \phi_2 \equiv 0 \,\text{και}\, f = \sin x.$$

Λύση. Προφανώς $b_k = 0 \ \forall k$, $a_2 = 1$, $a_k = 0$ για $k \geq 2$, $f_1 = 1$, $f_k = 0$ για $k \neq 1$ άρα για τον προσδιορισμό των Y_k έχουμε

$$Y_1''(y) - Y_1(y) = 1, \ \ Y_1(0) = 0, \ \ Y_1(1) = 0,$$

$$Y_2''(y) - 4Y_2(y) = 0, \;\; Y_2(0) = 1, \;\; Y_2(1) = 0,$$
$$Y_k''(y) - k^2 Y_k(y) = 0, \;\; Y_k(0) = 0, \;\; Y_k(1) = 0.$$

Άρα

$$Y_1(y) = \frac{1}{e+1}e^y \frac{e}{e+1}e^{-y} - 1,$$
$$Y_2(y) = \frac{1}{1-e^4}e^{2y} - \frac{e^4}{1-e^4}e^{-2y}$$

και

$$Y_k(y) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; k \geq 3.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x,y) = \Big(\frac{e^y}{e+1} + \frac{e^{1-y}}{e+1} - 1\Big)\sin x + \Big(\frac{e^{2y}}{1-e^4} - \frac{e^{4-2y}}{1-e^4}\Big)\sin 2x.$$

Τέλος, θα εξετάσουμε το πρόβλημα $Neumann$. Θα περιοριστούμε με την εξίσωσης (8.4) και συνοριακές συνθήκες

(8.9) $$u_x(0,y) = u_x(l,y) = 0 \;\; \text{για} \;\; y \in [0, l_1],$$

(8.10) $$u_y(x,0) = \phi_1(x), \;\; u_y(x,l) = \phi_2(x) \;\; \text{για} \;\; x \in [0,l],$$

με $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = \phi_1'(l) = \phi_2'(l) = 0$. Θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10). Εδω υπάρχουν δυο ιδιαιτερότητες σε σχέση με το πρόβλημα $Dirichlet$. Η πρώτη είναι οτι το πρόβλιμα $Neumann$ για τυχαίες ϕ_1, ϕ_2 μπορεί να μην έχει λύση. Πράγματι απο το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\int_\Omega \Delta u dxdy = \int_\Omega div(\nabla u)dxdy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

όπου $\Omega = (0,l) \times (0, l_1)$, $\partial\Omega$ το σύνορο του χωρίου Ω, ν μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Συνεπώς (αφού $\Delta u = 0$) η αναγκαία συνθήκη για την υπαρξη της λύσης είναι

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

Η συνθήκη αυτή στη περίπτωση μας (υπολογίζουμε το άνω ολοκλήρωμα για συνοριακές συνθήκες (8.9), (8.10)) παίρνει τη μορφή

(8.12) $$-\int_0^l \phi_1(x)dx + \int_0^l \phi_2(x)dx = 0.$$

Η δευτερη ιδιαιτερότητα είναι οτι αν η u είναι λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10) τότε και η $u + C$ με τυχαια σταθερά C είναι επίσης λύση.

Θα κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10) υπο τον περιορισμό (8.12) και με αυτο θα δείξουμε οτι η συνθήκη (8.12) είναι ικανή και αναγκαία για την υπαρξη της λύσης.

Όπως πάντα ψάχνουμε τη λύση της εξίσωσης (8.4) σε μορφή

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

και καταλήγουμε στην

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες (8.9) για την συνάρτηση $X(x)$ προκύπτει το εξής πρόβλημα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Όπως γνωρίζουμε, μη τετριμμένες λύσεις υπάρχουν μόνο για

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

και δίνονται ως

$$X(x) = C\,\cos\frac{k\pi}{l}x, \quad C - \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

Επίσης για την Y έχουμε

$$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0 \quad y \in [0, l_1],$$

με γενική λύση

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y$$

για $k = 0$ και

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}, \quad A_k,\, B_k - \text{αυθαίρετες σταθερές.}$$

για $k = 1, 2, ...$ Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$u_k(x, y) = X_k(x) Y_k(y), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

επαληθεύουν την εξίσωση (8.4) και τις συνθήκες (8.9). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) =$$

$$A_0 + B_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}\right) \cos\frac{k\pi}{l}x$$

υπό την προϋπόθεση ότι συγκλίνει και οι παράγωγοι όρο προς όρο πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x και y επίσης συγκλίνουν. Για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (8.10) θα ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία, γράφουμε

$$\phi_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\cos\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_1(x)\,\cos\frac{k\pi}{l}x dx,$$

και

$$\phi_2(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\cos\frac{k\pi}{l}x, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_2(x)\,\cos\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Θέλουμε να ισχύει το εξής

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{ky}(x, 0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}(A_k - B_k)\cos\frac{k\pi}{l}x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{ky}(x,l) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}(A_k e^{k\pi} - B_k e^{-k\pi}) \cos\frac{k\pi}{l}x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi}{l}x,$$

άρα πρέπει

$$B_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k - B_k = \frac{l}{k\pi}a_k \ \text{ για } \ k = 1, 2, ...,$$

$$B_0 = \frac{b_0}{2}, \quad A_k e^{k\pi} - B_k e^{-k\pi} = \frac{l}{k\pi}b_k, \ \text{ για } \ k = 1, 2, \dots .$$

Αρα αναγκαστικά

$$a_0 = b_0,$$

(είναι η συνθήκη (8.12)!), $B_0 = a_0/2 (= b_0/2)$ και για $k = 1, 2, ...$

$$A_k = \frac{l}{k\pi}\frac{e^{k\pi}b_k - a_k}{e^{2k\pi} - 1}, \quad B_k = \frac{l}{k\pi}\frac{e^{k\pi}b_k + 1 - a_k(1 + e^{2k\pi})}{e^{2k\pi} - 1}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10) δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = A_0 +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{l}{k\pi}\frac{e^{k\pi}b_k - a_k}{e^{2k\pi} - 1} e^{ky} + \frac{l}{k\pi}\frac{e^{k\pi}b_k + 1 - a_k(1 + e^{2k\pi})}{e^{2k\pi} - 1} e^{-ky} \Big) \cos\frac{k\pi}{l}x$$

όπου A_0 τυχαία σταθερά (προφανώς υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y).

Ασκήσεις.

1. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών ανάγετε το πρόβλημα

$$\Delta u = f \ \text{ στο } \ P = (a,b)^2,$$

$$u\Big|_{\partial P} = 0,$$

στο

$$\Delta u = f \ \text{ στο } \ \Pi = (0,l)^2,$$

$$u\Big|_{\partial \Pi} = 0.$$

Εδω f κάποια συνάρτηση, ∂P σύνορο του χωρίου P, $a < b$.

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.4), (8.2), (8.3) με $l_1 = l = \pi$,

$$\phi_1 = \sin x + 2\sin 2x \ \text{ και } \ \phi_2 = \sin x.$$

3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ (0,\pi)^2,$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ \text{ για } \ y \in [0,\pi],$$

$$u(x,0) = \cos x, \ \ u(x,\pi) = \cos x \ \text{ για } \ x \in [0,\pi].$$

4. Με κατάλληλη αλλαγή προσδιοριστέας συνάρτησης ανάγετε το πρόβλημα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ (x,y) \in (0,l_1) \times (0,l_2),$$

$$u(0,y) = h_1(y), \quad u(l_1,y) = h_2(y) \;\; \text{για} \;\; y \in [0,l_2],$$
$$u(x,0) = \phi_1(x), \quad u(x,l_2) = \phi_2(x) \;\; \text{για} \;\; x \in [0,l_1],$$

με

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_1(l_1) = \phi_2(l_1) = h_1(0) = h_2(0) = h_1(l_2) = h_2(l_2) = 0$$

στο πρόβλημα

$$v_{xx} + v_{yy} = f(x,y) \;\; (x,y) \in (0,l_1) \times (0,l_2),$$
$$v(0,y) = v(l_1,y) = 0 \;\; \text{για} \;\; y \in [0,l_2],$$
$$v(x,0) = v(x,l_2) = 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [0,l_1].$$

Εδω ϕ_i, h_i δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\; \text{στο} \;\; (0,\pi)^2,$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \sin y \;\; \text{για} \;\; y \in [0,\pi],$$
$$u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [0,\pi].$$

6. Προσδιορίστε τη η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + u_{yy} = \cos 3x \;\; \text{στο} \;\; (0,\pi)^2,$$
$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \;\; \text{για} \;\; y \in [0,\pi],$$
$$u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [0,\pi].$$

§9. Μέθοδος $Fourier$ σε πιο γενικές περιπτώσεις

Θα δούμε εδω μια πιο γενική περίπτωση εξισώσεων όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Θα περιοριστούμε με της συνοριακές συνθήκες $Dirichlet$ όμως το ίδιο ισχεί και για άλλες συνοριακές συνθήκες.

I. Θα ξεκινήσουμε με εξισώσεις υπερβολικού τύπου:

$$e(t)u_{tt} - a(x)u_{xx} + b(t)u_t - c(x)u_x + d(t)u = 0 \text{ στο } (-\infty, +\infty) \times (0, l) \tag{9.1}$$

Εδω $e(t) > 0$ $\forall t$ και $a(x) > 0$ στο $[0, l]$. Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$u = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (9.1) και διαιρώντας δια $T(t)X(x)$ παίρνουμε

$$e(t)\frac{T''(t)}{T(t)} + b(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)}$$

για κάθε t και x, συνεπώς

$$e(t)\frac{T''(t)}{T(t)} + b(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά, οι μεταβλητές χωρίσαν. Άρα

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{9.2}$$

$$e(t)T''(t) + b(t)T'(t) + (d(t) + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.3}$$

Επίσης οι μεταβλητές χωρίζουν αν $d = d(x)$, σε αυτή την περίπτωση οι (9.2), (9.3) παίρνου τη μορφή

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + (\lambda + d(x))X(x) = 0,$$
$$e(t)T''(t) + b(t)T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Η εξίσωση (9.1) (με $d = d(x)$ ή $d = d(t)$) είναι η πιο γενική μορφή (ομογενούς) γραμμικής εξίσωσης υπερβολικού τύπου όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Εμείς θα περιοριστούμε με πιο απλή περίπτωση. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} + \beta u_t + \delta u = 0 \text{ στο } (-\infty, +\infty) \times (0, l), \tag{9.4}$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l, \tag{9.5}$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{9.6}$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Εδω β, δ κάποιες σταθερές. Ψάχνοντας λύση της μορφής $T(t)X(x)$ καταλήγουμε στο εξής

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T''(t) + \beta T'(t) + (\delta + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.7}$$

Προφανώς (βλ. §5. αυτού του κεφαλαίου) παίρνουμε

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

και

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Επίσης για $\lambda = \lambda_k$ η (9.7) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k\,\mathcal{T}_1(t) + B_k\,\mathcal{T}_2(t), \tag{9.8}$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές και $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (9.7). Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\,X_k(x) = \big(A_k\,\mathcal{T}_1(t) + B_k\,\mathcal{T}_2(t)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

λύνουν την εξίσωση (9.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (9.5). Το ίδιο και η σειρά

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{T}_1(t) + B_k\,\mathcal{T}_2(t)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{9.9}$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (9.5). Γράφουμε τις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x$$

όπου

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x dx, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση (9.9). Επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Έχουμε ότι

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{T}_1(0) + B_k\,\mathcal{T}_2(0)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k\,\mathcal{T}_1(0) + B_k\,\mathcal{T}_2(0) = a_k. \tag{9.10}$$

Επίσης

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{T}_1'(0) + B_k\,\mathcal{T}_2'(0)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k\, \mathcal{T}_1'(0) + B_k\, \mathcal{T}_2'(0) = b_k. \tag{9.11}$$

Αρα, η λύση είναι η (9.9) όπου οι A_k, B_k ορίζονται απο (9.10), (9.11).

Παρατήρηση 1. Η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(0) & \mathcal{T}_2(0) \\ \mathcal{T}_1'(0) & \mathcal{T}_2'(0) \end{pmatrix}$$

ονομάζεται Βρονσκιανή (βλ. το μάθημα ΣΔΕ) και είναι διάφορη του μηδενός, αρα το γραμμικό σύστημα (9.10), (9.11) έχει πάντα μοναδική λύση.

Παράδειγμα 9.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0 \;\; (t,x) \in (-\infty,\infty) \times (0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u_t(0,x) = \sin 3x, \;\; x \in (0,\pi).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την άνω διαδικασία παίρνουμε

$$\lambda_k = k^2, \;\; X_k(x) = \sin kx, \;\; k = 1,2,...$$

και

$$T_k(t) = e^{-t}(A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

αφου το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της

$$T''(t) + 2T'(t) + (1+k^2)T(t) = 0$$

είναι $e^{-t}\cos kt, \quad e^{-t}\sin kt$. Συνεπώς για τον προσδιοριζμό των A_k και B_k έχουμε

$$A_k = a_k,$$
$$-A_k + kB_k = b_k$$

ήτοι

$$A_k = a_k, \;\; B_k = \frac{b_k + a_k}{k}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$a_1 = 1, \;\; a_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 1, \;\; b_3 = 1, \;\; b_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 3$$

έχουμε

$$A_1 = 1, \;\; A_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 1,$$

και

$$B_1 = 1, \;\; B_3 = \frac{1}{3}, \;\; B_k = 0 \;\text{ για τα υπόλοιπα }\; k.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = e^{-t}\Big((\cos t + \sin t)\sin x + \frac{1}{3}\sin 3t \sin 3x\Big).$$

II. Εξισώσεις παραβολικού τύπου. Θεωρούμε τη εξίσωση

$$e(t)u_t - a(x)u_{xx} - c(x)u_x + d(t)u = 0 \text{ στο } (0,+\infty)\times(0,l) \tag{9.12}$$

Εδω $e(t) > 0$ $\forall t \geq 0$, $a(x) > 0$ στο $[0,l]$. Όπως και πρίν ψάχνουμε λύση της μορφής

$$u = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (9.12) και διαιρώντας δια $T(t)X(x)$ παίρνουμε

$$e(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)}$$

για κάθε t και x συνεπώς

$$e(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά, οι μεταβλητές χωρίσαν. Άρα

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{9.13}$$

και

$$e(t)T'(t) + (d(t)+\lambda)T(t) = 0. \tag{9.14}$$

Επίσης οι μεταβλητές χωρίζουν αν $d = d(x)$, σε αυτή την περίπτωση οι (9.13), (9.14) παίρνου τη μορφή

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + (\lambda + d(x)) = 0,$$
$$e(t)T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Η εξίσωση (9.12) (με $d = d(x)$ ή $d = d(t)$) είναι η πιο γενική μορφή (ομογενούς) γραμμικής εξίσωσης παραβολικού τύπου όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Εμείς και εδώ θα περιοριστούμε με πιο απλή περίπτωση.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_t - u_{xx} + \delta u = 0 \text{ στο } (0,+\infty)\times(0,l) \tag{9.15}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \text{ για } 0 < x < l \tag{9.16}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{9.17}$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = 0.$$

Εδω δ μια σταθερά. Ψάχνοντας λύση της μορφής $T(t)X(x)$ καταλήγουμε στο εξής

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T'(t) + (\delta + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.18}$$

Έχουμε

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \text{ και } X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x \quad k = 1,2,\dots.$$

Επίσης για $\lambda = \lambda_k$ η (9.18) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k e^{-(\delta+\lambda_k)t},$$

όπου A_k αυθαίρετη. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\,X_k(x) = A_k e^{-(\delta+\lambda_k)t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (9.15) και επαληθεύουν τις συνθήκες (9.17). Το ίδιο και η σειρά

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\delta+\lambda_k)t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{9.19}$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε την αρχική συνθήκη (9.16). Γράφουμε την $\phi(x)$ σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση (9.19) και επιλέγουμε τις σταθερές A_k ε.ω.

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Δηλαδή

$$A_k = a_k.$$

Αρα, η λύση είναι

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\delta+\lambda_k)t} \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 9.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} + u = 0 \;\; (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t > 0,$$
$$u(0,x) = 3\sin 2x, \;\; x \in (0,\pi).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την άνω διαδικασία παίρνουμε $\lambda_k = k^2$,

$$X_k(x) = \sin kx,$$

$$T_k(t) = A_k e^{-(1+k^2)t}$$

και

$$a_2 = 3, \;\; a_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 2.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = 3e^{-5t}\sin 2x.$$

III. Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου. Θεωρούμε την εξίσωση

$$a(x)u_{xx} + b_1(y)u_{yy} + c(x)u_x + d_1(y)u_y + e(y)u = 0 \text{ στο } (x,y) \in (0,l)\times(0,l_1).$$

Εδω $a(x) > 0$, $b_1(y) > 0$ στο $[0, l]$, $[0, l_1]$ αντίστοιχα. Χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα μπορούμε να πάρουμε $l_1 = \pi$. Πράγματι, εισάγουμε καινούργιες μεταβλητές

$$\eta = \frac{\pi}{l_1} y.$$

Προφανώς αν $(x, y) \in (0, l) \times (0, l_1)$, τότε $(x, \eta) \in (0, l) \times (0, \pi)$. Επίσης για

$$\tilde{u}(x, \eta) = u(x, y)$$

έχουμε (κανόνας της αλυσίδας)

$$u_x = \tilde{u}_x, \quad u_{xx} = \tilde{u}_{xx},$$

$$u_y = \tilde{u}_\eta \frac{\pi}{l_1}, \quad u_{yy} = \tilde{u}_{\eta\eta} \Big(\frac{\pi}{l_1}\Big)^2.$$

Συνεπώς

$$a(x)\tilde{u}_{xx} + b(\eta)\tilde{u}_{\eta\eta} + c(x)\tilde{u}_x + d(\eta)\tilde{u}_\eta + e(\eta)\tilde{u} = 0 \ \text{ στο } \ (x, y) \in (0, l) \times (0, \pi).$$

Αρα (χρησιμοποιώντας τα σύμβολα u, y αντι $\tilde{u}, \eta$) έχουμε την εξίσωση

$$\text{(9.20)} \quad a(x)u_{xx} + b(y)u_{yy} + c(x)u_x + d(y)u_y + e(y)u = 0 \ \text{ στο } \ (0, l) \times (0, \pi).$$

Ψάχνουμε λύση σε μορφή

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (9.20) και διαιρώντας δια $X(x)Y(y)$ παίρνουμε

$$a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -b(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} - d(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} - e(y)$$

για κάθε x και y συνεπώς

$$a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -b(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} - d(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} - e(y) = -\lambda$$

και

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$b(y)Y''(y) + d(y)Y'(y) + (e(y) - \lambda)Y(y) = 0.$$

Επίσης οι μεταβλητές χωρίζουν αν $d = d(x)$, σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + (e(x) + \lambda)X(x) = 0,$$

$$b(y)Y''(y) + d(y)Y'(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Η εξίσωση (9.20) (με $e = e(x)$ ή $e = e(y)$) είναι η πιο γενική μορφή (ομογενούς) γραμμικής εξίσωσης ελλειπτικού τύπου όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Εμείς θα περιοριστούμε με πιο απλή περίπτωση. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\text{(9.21)} \qquad u_{xx} + \alpha u_{yy} + \gamma u_y + \delta u = 0 \ \text{ στο } \ (x, y) \in (0, l) \times (0, \pi).$$

$$\text{(9.22)} \qquad u(x, 0) = \phi(x), \quad u(x, \pi) = \psi(x) \ \text{ για } \ 0 < x < l$$

$$\text{(9.23)} \qquad u(0, y) = u(l, y) = 0 \ \text{ για } \ y \in (0, \pi)$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Εδω $\alpha > 0$, γ και δ κάποιες σταθερές.

Ψάχνοντας λύση της μορφής $T(t)X(x)$ καταλήγουμε στο εξής

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$Y''(y) + \frac{\gamma}{\alpha}Y'(y) + \frac{\delta - \lambda}{\alpha}Y(y) = 0. \tag{9.24}$$

Άρα έχουμε

$$\lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2 \ \text{ και } \ X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Επίσης για $\lambda = \lambda_k$ η (9.24) μας δίνει

$$Y_k(t) = A_k\,\mathcal{Y}_1(y) + B_k\,\mathcal{Y}_2(y), \tag{9.25}$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές και $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (9.25). Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$Y_k(y)\,X_k(x) = \big(A_k\,\mathcal{Y}_1(y) + B_k\,\mathcal{Y}_2(y)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots$$

λύνουν την εξίσωση (9.21) και επαληθεύουν τις συνθήκες (9.23). Το ίδιο και η σειρά

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{Y}_1(y) + B_k\,\mathcal{Y}_2(y)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{9.26}$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (9.22). Γράφουμε τις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(0)\,\sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, ,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k\,\mathcal{Y}_1(0) + B_k\,\mathcal{Y}_2(0) = a_k. \tag{9.27}$$

Επίσης

$$u(x, \pi) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\pi)\,\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

άρα

$$A_k\,\mathcal{Y}_1(\pi) + B_k\,\mathcal{Y}_2(\pi) = b_k. \tag{9.28}$$

Αρα, η λύση είναι η (9.26) όπου οι A_k, B_k ορίζονται απο (9.27), (9.28).

Παρατήρηση 2. Η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1(0) & \mathcal{Y}_2(0) \\ \mathcal{Y}_1(\pi) & \mathcal{Y}_2(\pi) \end{pmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός αφου οι $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 9.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + 4u_{yy} - 4u_y + u = 0 \ \ (x, y) \in (0, \pi)^2,$$
$$u(x, 0) = \sin x, \ \ u(x, \pi) = 0, \qquad y \in (0, \pi),$$
$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \ \ x \in (0, \pi).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την άνω διαδικασία παίρνουμε

$$X_k(x) = \sin kx$$

και

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{1+k}{2}y} + B_k e^{\frac{1-k}{2}y}$$

αφου το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της

$$Y''(y) - Y'(y) + \frac{1-k^2}{4} Y(y) = 0$$

είναι $e^{\frac{1+k}{2}y}$, $e^{\frac{1-k}{2}y}$. Συνεπώς για τον προσδιοριζμό των A_k και B_k έχουμε

$$A_k + B_k = a_k,$$
$$A_k e^{\frac{1+k}{2}\pi} + B_k e^{\frac{1-k}{2}\pi} = b_k.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$a_1 = 1, \ \ a_k = 0 \ \text{ για } \ k \neq 1, \ \ b_k = 0 \ \ \forall k$$

παίρνουμε

$$A_1 + B_1 = 1, \ \ A_k + B_k = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 3 \ldots,$$
$$A_k = -B_k e^{-k\pi}$$

ήτοι

$$A_1 = -\frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \ \ B_1 = \frac{1}{1 - e^{-\pi}},$$
$$A_k = B_k = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 3 \ldots.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x, y) = \Big(\frac{e^{-\pi}}{e^{-\pi} - 1} e^y - \frac{1}{e^{-\pi} - 1}\Big) \sin x = \frac{e^{y-\pi} - 1}{e^{-\pi} - 1} \sin x.$$

Ασκήσεις.

1. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής $x \to \xi$ ($\xi = h(x)$) ανάγετε το πρόβλημα

$$e(t)u_{tt} - a(x)u_{xx} + b(t)u_t - c(x)u_x + d(t)u = 0 \ \text{ στο } \ (-\infty, +\infty) \times (l_1, l_2)$$
$$u(0, x) = \phi(x), \ \ u_t(0, x) = \psi(x) \ \text{ για } \ l_1 < x < l_2$$

$$u(t,l_1)=u(t,l_2)=0 \ \text{ για } \ |t|<\infty$$

με τυχαία l_1, l_2 ($l_1<l_2$), σε πρόβλημα

$$e(t)u_{tt}-\tilde{a}(\xi)u_{\xi\xi}+b(t)u_t-\tilde{c}(\xi)u_\xi+d(t)u=0 \ \text{ στο } \ (-\infty,+\infty)\times(0,\,\pi)$$

$$u(0,\xi)=\tilde{\phi}(\xi), \ \ u_t(0,\xi)=\tilde{\psi}(\xi) \ \text{ για } \ 0<\xi<\pi$$

$$u(t,0)=u(t,\pi)=0 \ \text{ για } \ |t|<\infty$$

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t-2u_{xx}+u=\sin 2x \ \ (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi),$$

$$u(t,0)=u(t,\pi)=0, \qquad t\in(-\infty,\infty),$$

$$u(0,x)=\sin\,3x, \ \ x\in(0,\pi).$$

3. Ανάγετε το πρόβλημα

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \ \text{ στο } \ (x,y)\in(0,2\pi)\times(c,d)$$

$$u(x,c)=\phi(x), \ \ u(x,d)=0 \ \text{ για } \ 0\le x\le 2\pi$$

$$u(0,y)=u(2\pi,y)=0 \ \text{ για } \ c\le y\le d$$

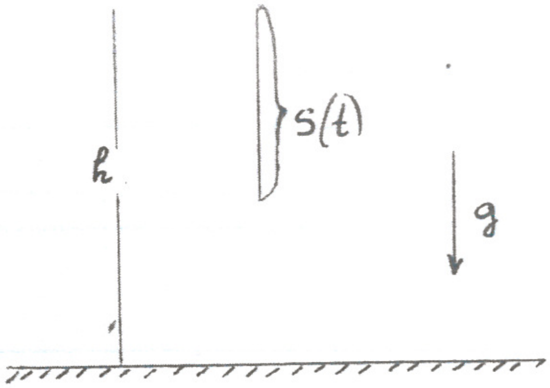
σε πρόβλημα

$$\alpha u_{\xi\xi}+\beta u_{\eta\eta}=0 \ \text{ στο } \ (\xi,\eta)\in(0,\,\pi)^2$$

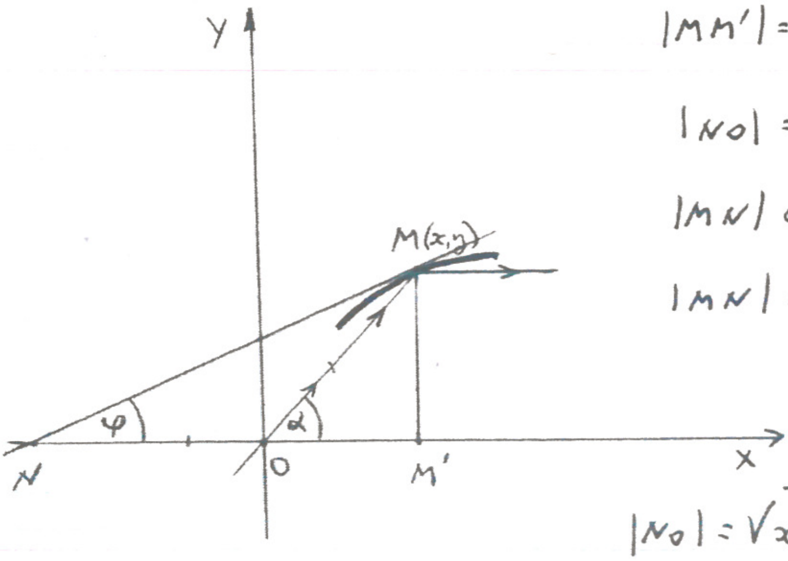
$$u(\xi,0)=\tilde{\phi}(\xi), \ \ u(\xi,\pi)=0 \ \text{ για } \ 0\le\xi\le\pi$$

$$u(0,\eta)=u(\pi,\eta)=0 \ \text{ για } \ 0\le\eta\le\pi$$

και έπειτα προσδιορίστε τη λύση (του αρχικού προβλήματος) για $\phi(x)=\sin\frac{x}{2}$.



σχήμα 1



$|MM'| = y \quad |OM'| = x$

$|NO| = |OM|$

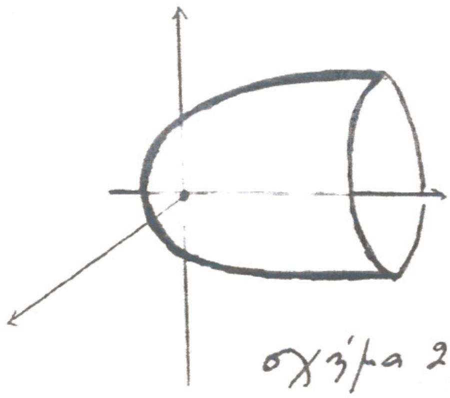
$|MN| \cos\varphi = |NM'|$

$|MN| \sin\varphi = |MM'|$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x + |NO|}$$

$|NO| = \sqrt{x^2 + y^2} = |OM|$

σχήμα 2α.



σχήμα 2β.