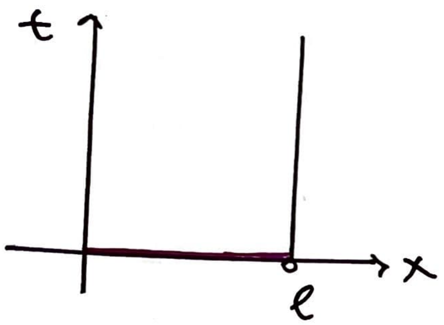
Μέθοδος Fourier για κυματική εξίσωση

$u_{tt} - u_{xx} = 0$ (ομογενής), $0 < x < \ell$, $t > 0$

$u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ ~ αρχικές συνθήκες γενικές

$u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ ~ μηδενικές συνθήκες Dirichlet



▸ Αναζητώ λύσεις στην μορφή $\overbrace{X(x)\,T(t)}^{u(x,t)} \neq 0$ οπότε

$XT'' - X''T = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ ← σταθερά ⇒

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(\ell) = 0$ (1)

$T''(t) + \lambda T(t) = 0$ (2)

▸ Το (1) είναι πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) και έχουμε δει, διακρίνοντας περιπτώσεις ($\lambda<0$, $\lambda=0$ και $\lambda>0$), ότι όταν το λ είναι ίσο με: $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$ με $k = 1, 2, 3, \dots$ τότε έχω μη-τετριμμένες (δηλ $\neq 0$) λύσεις τις

$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{\ell}$

Τα λ_k λέγονται ιδιοτιμές της ΠΣΤ και οι X_k ιδιοσυναρτήσεις.

Έχοντας δει τα λ_k πηγαίνω στο πρόβλημα (2):

$T''(t)+\lambda_k T(t)=0$

Η λύση του οποίου είναι: $T_k(t)=A_k\cos\frac{k\pi t}{\ell}+B_k\sin\frac{k\pi t}{\ell}$

με $k=1,2,\ldots$

Άρα μέχρι στιγμής έχω ότι: οι συναρτήσεις

$$X_k(x)T_k(t)=\sin\frac{k\pi x}{\ell}\left[A_k\cos\frac{k\pi t}{\ell}+B_k\sin\frac{k\pi t}{\ell}\right]$$

είναι λύσεις της εξίσωσης $\boxed{u_{tt}-u_{xx}=0}$ και ικανοποιούν $\boxed{u(0,t)=u(0,\ell)=0}$ — (3)

Από γραμμικότητα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)$ ικανοποιεί τις (3).

- Για να βρώ τις σταθερές A_k, B_k θα χρησιμοποιήσω τις αρχ. συνθήκες. Επεκτείνω τις ϕ,φ με περιττό τρόπο στο $(-\ell,\ell)$ και με περιοδικό τρόπο (με $T=2\ell$) σε όλο το $\mathbb{R}$. Στην συνέχεια αναπτύσσω τις ϕ,φ σε σειρές Fourier (μόνο ημίτονα επειδή είναι περιττές).

- $\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}$

$\hookrightarrow a_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\phi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx$

- $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}$

$\hookrightarrow b_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$

Έχω ότι $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\frac{k\pi t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi t}{\ell}\right] \sin\frac{k\pi x}{\ell}$

Άρα $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$. ⇝ Θα πρέπει $u(x,0) = \phi(x)$

Δηλαδή, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$. Άρα αρκεί $\boxed{A_k = a_k}$

Για να ικανοποιήσω την συνθήκη $u_t(x,0) = \psi(x)$, θα υπολογίσω πρώτα την $u_t(x,t)$.

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k\pi}{\ell} A_k \sin\frac{k\pi t}{\ell} + \frac{k\pi}{\ell} B_k \cos\frac{k\pi t}{\ell}\right] \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

Για $t=0$: $u_t(x,0) = \psi(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{\ell} B_k \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$

Αρκεί: $\frac{k\pi}{\ell} B_k = b_k \Rightarrow \boxed{B_k = \frac{\ell}{k\pi} b_k}$

Άρα η τελική λύση του (*) είναι η:

$$(4)\quad \boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\frac{k\pi t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi t}{\ell}\right] \sin\frac{k\pi x}{\ell}}, \quad A_k = a_k, \quad B_k = \frac{\ell}{k\pi} b_k$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \geq 0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = \underbrace{\sin x + \sin 4x}_{\phi(x)}, \quad u_t(x,0) = \underbrace{\sin x + \sin 2x}_{\psi(x)}$

ΛΥΣΗ

Εάν αναπτύξω την $\phi(x)$ σε σειρά ημιτόνων έχω ότι:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \quad (\delta\iota o\upsilon \ \ell = \pi)$$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = \sin x + \sin 4x \Rightarrow a_1 = 1,\ a_4 = 1$ όλα τα άλλα $a_k = 0$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sin x + \sin 2x \Rightarrow b_1 = 1,\ b_2 = 1,$$ τα υπόλοιπα $b_k = 0$

Από την (4) έχω ότι: $A_1 = A_4 = 1,\ B_1 = b_1 = 1,\ B_2 = \frac{1}{2} b_2 = \frac{1}{2}$

και όλοι οι συντελεστές $A_k, B_k = 0$

Άρα $u(x,t) = \underbrace{(\cos t + \sin t)\sin x}_{k=1} + \overbrace{\frac{1}{2}\sin(2t)\sin(2x)}^{k=2} + \underbrace{\cos(4t)\sin(4x)}_{k=4}$

▸ Μη-Μηδενικές Συνοριακές Συνθήκες (Σ.Σ)

$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad , 0 < x < \ell$

$u(0,t) = \mu_1(t) \quad , u(\ell,t) = \mu_2(t)$

$u(x,0) = \phi(x) \quad , u_t(x,0) = \psi(x)$

Ορίζω νέα συνάρτηση $v(x,t) = u(x,t) - h(x-t)$ που να ικανοποιεί μηδενικές Σ.Σ. Βρίσκω την κατάλληλη $h(x,t)$:

· $V(0,t) = u(0,t) - h(0,t) = \mu_1(t) - h(0,t) = 0 \Rightarrow h(0,t) = \mu_1(t)$

· $v(\ell,t) = \quad ... \quad = \mu_2(t) - h(\ell,t) = 0 \Rightarrow h(\ell,t) = \mu_2(t)$

Οπότε φτιάχνω έναν γραμ. συνδυασμό: $\boxed{h(x,t) = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\mu_1(t) + \frac{x}{\ell}\mu_2(t) \quad 0 < x < \ell}$

~ Τι ικανοποιεί συνολικά η $v(x,t)$;

$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} + h_{tt} - h_{xx} = 0 + \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\mu_1''(t) + \frac{x}{\ell}\mu_2''(t)$

$v(0,t) = v(\ell,t) = 0$

$v(x,0) = \underbrace{u(x,0)}_{\phi} - \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\mu_1(0) - \frac{x}{\ell}\mu_2(0) = \Phi(x)$

$V_t(x,0) = \underbrace{u_t(x,0)}_{\psi} - \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\mu_1'(0) - \frac{x}{\ell}\mu_2'(0) = \bar{\Psi}(x)$

⇒ Αυτή η τεχνική ισχύει και για μη-ομογενή περιπτώσεις.
Αρκεί λοιπόν να δούμε πως λύνουμε την μη-ομογενή κυματική εξ. με μηδενικές Dirichlet Σ.Σ.

Μη ομογενής Ε.Ξ. με μηδενικές Dirichlet Σ.Σ

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \quad , 0<x<\ell \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x,0) = \phi(x) \quad , u_t(x,0) = \psi(x) \quad (3)$$

- Όταν λύναμε την ομογενή βρήκαμε λύση στην μορφή:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (4)$$

Θα αναζητήσω λύση της μη-ομογενούς στην ίδια μορφή, όπου θα ψάξω να βρώ τα $u_k(t)$. Αναπτύσσω σε σειρά Fourier την $f(x,t)$.

Άρα (4') $f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$, όπου $f_k(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx$

Βάζοντας την (4) και (4') στην (1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} - \left[-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2\right] \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t)\right] \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

Για να ισχύει αυτό αρκεί: $\underbrace{u_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t) = f_k(t)}_{\text{συνήθης}}$, $k = 1, 2, \dots$ (5)

Θα συμπληρώσω την (5) με κατάλληλες αρχ. συνθήκες

$$u(x,0) \overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \xrightarrow[\text{σε Fourier}]{\text{αναπτύσσω}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_k(0) = a_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\left(a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\right)$$

Αντίστοιχα εάν $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \Rightarrow \boxed{u_k'(0) = b_k}$

→ Άρα για να βρω $u_k(t)$ πρέπει να λύσω: $(\forall k = 1,2,\dots)$

$$\left.\begin{aligned} &u_k'' + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k = f_k \\ &u_k(0) = a_k \\ &u_k'(0) = b_k \end{aligned}\right\}$$ και η (4) μου δίνει την λύση!

Παραδείγματα

1) $u_{tt} - u_{xx} = \sin x \quad , 0 < x < \pi$

$u(0,t) = u(\ell,t) = 0$

$\underbrace{u(x,0)}_{\phi} = \sin x \;,\; \underbrace{u_t(x,0)}_{\psi} = \sin 3x$

Λύση

Αναζητώ λύση στην μορφή $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin(kx) = u(x,t)$

Τα u_k ικανοποιούν:

$u_k'' + k^2 u_k = f_k \quad , k = 1,2,\dots$

$u_k(0) = a_k$

$u_k'(0) = b_k$

$f(t,x) = \sin x$ δηλ. $f_1(t) = 1$ (τα άλλο $=0$)

$u(x,0) = \phi(x) = \sin x \Rightarrow a_1 = 1$ (υπολ $=$

$u_t(x,0) = \psi(x) = \sin 3x \Rightarrow b_3 = 1$ (υπολ$=$

- Για $k=1$ | $u_1'' + u_1 = 1$
  $u_1(0) = 1,\ u_1'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{u_1(t) = 1}$
- Για $k=2$ | $u_2'' + 4u_2 = 0 \;, u_2(0) = u_2'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{u_2 = 0}$
- Για $k=3$ | $u_3'' + 9u_3 = 0 \;, u_3(0) = 0,\ u_3'(0) = 1$
- Για $k \geq 4$ | $u_k'' + k^2 u_k = 0 \;, u_k(0) = u_k'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{u_k = 0}$

Πρωτα κάνω χπ

4

Διοτι:

Για $k=1$ | Βρίσκω την ομογενή λύση : $u_{1o\mu}=c_1\sin t+c_2\cos t$

$u_\mu = 1$

(χρησιμοποιω $u_{\gamma\varepsilon\nu}=u_\mu+u_{o\mu}$)

Αρα $u_{1\gamma\varepsilon\nu}=c_1\sin t+c_2\cos t+1=u_1$

$u_1(0)=1 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$

$u_1'=c_1\cos t$, $u_1'(0)=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$

Αρα $u_1(t)=0\sin t+0\cos t+1 \Rightarrow \boxed{u_1(t)=1}$

Για $k=3$ | $u_3(t)=c_1\sin(3t)+c_2\cos(3t)$ (είναι ήδη ομογενής δεν θέλω $u_{\mu\varepsilon\rho}$)

$u_3(0)=0 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$

$u_3'(t)=3c_1\cos(3t) \xRightarrow{u_3'(0)=1} 1=3c_1 \Rightarrow \boxed{c_1=\frac{1}{3}}$

Αρα $\boxed{u_3(t)=\frac{1}{3}\sin(3t)}$

Αρα, τελικά η λύση είναι: $\boxed{u(x,t)=\sin x+\frac{1}{3}\sin(3t)\sin(3x)}$

2) $u_{tt}-u_{xx}=\sin 2x+2$, $0<x<\pi$, $t>0$

$u(0,t)=u(\pi,t)=t^2$, $t>0$

$u(x,0)=\sin x$, $u_t(x,0)=\sin 3x$, $0<x<\pi$

ΛΥΣΗ

Ορίζω νέα συνάρτηση $v(x,t)$ η οποία να ικανοποιεί μηδενικές Dirichlet συνθήκες.

$V(x,t)=u(x,t)-\left(1-\frac{x}{\pi}\right)t^2-\frac{x}{\pi}t^2=u(x,t)-t^2$

Η v ικανοποιεί: $V_{tt}-V_{xx}=u_{tt}-2-u_{xx}=\sin x+\cancel{2}-\cancel{2}=\sin x$

Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} V_{tt}-V_{xx}=\sin x \ , \ 0<x<\pi \\ V(0,t)=V(\pi,t)=0 \\ V(x,0)=\sin x \ , \ V_t(x,0)=\sin 3x \end{array}\right\}$$

Ομοίως με παράδειγμα 1,

$V(x,t) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3t)\sin(3x)$

και συνεπώς: $\boxed{u(x,t) = V(x,t) + t^2 = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3t)\sin(3x) + t^2}$

ΘΕΩΡΗΜΑ $\Rightarrow$ Το πρόβλημα $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$, $0<x<\ell$

$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(\ell,t) = \mu_2(t)$

$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$

Έχει μοναδική λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι έχω 2 λύσεις u_1, u_2. Η $w = u_1 - u_2$ ικανοποιεί:

$$\left.\begin{array}{l} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = w(\ell,t) = 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 \end{array}\right\}$$

Σχηματίζω:

$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (w_t^2 + w_x^2)\,dx$ } Ενέργεια

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \int_0^\ell w_t \cdot w_{tt} + w_x w_{xt}\,dx = \int_0^\ell (w_t w_{tt} - w_{xx} w_t)\,dt$$

$$= \int_0^\ell w_t(w_{tt} - w_{xx})\,dx = 0.$$ Άρα $E(t) = \sigma\tau\alpha\theta$

Όμως $E(0) = 0 \Rightarrow \boxed{E(t) = 0}\ \forall t \geq 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_t^2 = 0 \\ w_x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w = \sigma\tau\alpha\theta$

Όμως $w(x,0) = 0 \Rightarrow w(x,t) = 0\ \forall t$

$\Rightarrow \boxed{u_1 = u_2}$