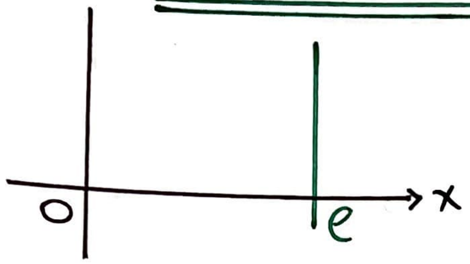
ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ Neumann



$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\ell,\ t>0$$

$$\left.u_x(0,t)=u_1(t),\ u_x(\ell,t)=u_2(t)\right\} \text{συνθήκες Neumann}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)$$

→ ΛΟΓΙΚΗ ΑΚΡΙΒΩΣ ΙΔΙΑ ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΕΣ Dirichlet

Η νέα συνάρτηση $v(x,t)=u(x,t)+\frac{\ell}{2}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2 v_1(t)-\frac{x^2}{2\ell}v_2(t)$, ικανοποιεί την (μη-ομογενή) κυματική εξ. με μηδενικές συνθήκες Neumann. Αρκεί λοιπόν να μελετήσω το πρόβλημα με μηδενικές συνθήκες Neumann. Όπως και στην περίπτωση των συνθηκών Dirichlet, εξετάζω πρώτα την περίπτωση της ομογενούς εξ. ($f\equiv 0$):

(1) $u_{tt}-u_{xx}=0,\quad 0<x<\ell,\ t>0$

(2) $u_x(0,t)=u_x(\ell,t)=0$ ← μηδενικές Neumann

(3) $v(x,0)=\phi(x),\ v_t(x,0)=\psi(x)$

↳ Αναζητώ λύση στην μορφή $X(x)T(t)\not\equiv 0$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} XT''-X''T=0 \Rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X'(0)=X'(\ell)=0$$ ← νέο πρόβλημα συνοριακών τιμών

Με παρόμοια (όπως για τον Dirichlet) βρίσκω ότι οι ιδιοτιμές είναι

$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2,\ k=0,1,2,\dots$ (επιτρέπεται και το $\lambda=0$)

και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι: $X_k(x)=\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right),\ k=0,1,2,\dots$

Γι' αυτά τα λ_k θα πρέπει να βρω τα T_k:

$$T_k''+\lambda_k T_k=0,\quad k=0,1,2,\dots$$

Για $\underline{k=0}$: $T_0(t) = A_0 + B_0 t$

Για $\underline{k=1,2,\dots} \Rightarrow T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi t}{\ell}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi t}{\ell}\right)$

Άρα μέχρι στιγμής, η $\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$, ικανοποιεί την (1) & (2)

(όχι ακόμα την (3)). Για να ικανοποιηθεί η (3), θα πρέπει να επιλέξω κατάλληλα τα A_k, B_k.

→ Κάνω $\underline{\underline{\text{άρτια}}}$ επέκταση των φ, ψ, στο $(-\ell,\ell)$ και αναπτύσσω σε σειρά συνημιτόνων

- $\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$, $a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$, $k=0,1,2,\dots$
- $\psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$, $b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$

Οπότε:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} X_k(x) T_k(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \\ u(x,0) &= \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} \\ A_k &= a_k \end{aligned}} \; k \geq 1$$

$$\left.\begin{aligned} u_t(x,0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} X_k(x) T_k'(0) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi}{\ell} B_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} B_0 &= \frac{b_0}{2} \\ B_k &= \frac{\ell}{k\pi} b_k \end{aligned}} \; k \geq 1$$

▸ U_H – ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΜΕ (μηδενικές) ΣΥΝΘΗΚΕΣ Neumann

(1) $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$, $0 < x < \ell$, $t > 0$

$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$, $t \geq 0$

$u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$

Αναπτύσσω την $f(x,t)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$

Αναζητώ λύση στην μορφή $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$.

Αν βάλω την u στην (1) και το ανάπτυγμα της $f(x,t)$, βρίσκω,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(u_k''(t)+\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t)\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_0''(t)=\frac{f_0(t)}{2},\ u_k''(t)+\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t)=f_k(t),\quad k=1,2,\ldots$$

$$u(x,0)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(0)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)=\phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_0(0)=\frac{a_0}{2} \\ u_k(0)=a_k \quad k=1,2,\ldots\end{array}}$$

$$\psi(x,0)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k'(0)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)=\frac{b_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_0'(0)=\frac{b_0}{2},\ u_k'(0)=b_k,}\quad k=1,2,\ldots$$

Τελικά, η λύση είναι: $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ όπου:

$\to u_0''(t)=\frac{f_0(t)}{2},\ u_0(0)=\frac{a_0}{2},\ u_0'(0)=\frac{b_0}{2}$

$\hookrightarrow u_k''(t)+\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t)=f_k(t),\ u_k(0)=a_k,\ u_k'(0)=b_k,\ k=1,2,\ldots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί: $u_{tt}-u_{xx}=\cos x,\ 0<x<\pi,\ t>0$

$u(0,t)=u_x(\pi,t)=0$

$u(x,0)=3\cos x,\ u_t(x,0)=\cos 2x$

ΛΥΣΗ

Η λύση είναι $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\cos(kx)$

$f(x,t) = \cos x$ άρα $f_1 = 1$, $f_k = 0$ για $k \neq 1$

$\phi(x) = 3\cos x$ άρα $a_1 = 3$, $f_k = 0$ για $k \neq 1$

$\psi(x) = \cos 2x$, $b_2 = 1$, $b_k = 0$, για $k \neq 2$

$\underline{k=0}|$ $u_0'' = 0$, $u_0(0) = u_0'(0) = 0 \Rightarrow u_0(t) \equiv 0$

$\underline{k=1}|$ $u_1'' + u_1 = 1$, $u_1(0) = 3$, $u_1'(0) = 0 \Rightarrow u_1(t) = 1 + 2\cos t$

$\underline{k=2}|$ $u_2'' + 4u_2 = 0$, $u_2(0) = 0$, $u_2'(0) = 1 \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$

$\underline{k \geq 3}|$ $u_k(t) \equiv 0$

Άρα $u(x,t) = (1 + 2\cos t)\cos x + \frac{1}{2}\sin(2t)\cos 2x$