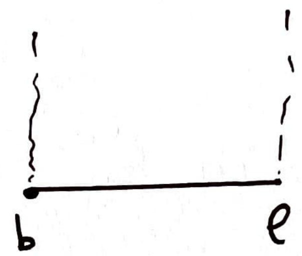
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ | ΔΕΥΤΕΡΑ 08/05/2023

## ▸ ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (Έχει μοναδική λύση)

(1) $u_t - u_{xx} = 0$ , $0<x<\ell$, $t>0$

(2) $u(x,0) = \phi(x)$

(3) $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ (ομογενείς Dirichlet)




Αναζητώ λύση στην μορφή $X(x)T(t) \neq 0$

→ Από (1) έχω ότι: $XT' - X''T = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} - \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

⇒ $X'' + \lambda X = 0$ , $X(0) = X(\ell) = 0$ (→ Το ίδιο που είχαμε στην κυματική)

$T' + \lambda T = 0$

Πρέπει $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$

$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{\ell}$ , $k = 1,2,3,\dots$

↳ Πάω στο $T' + \lambda T = 0$ και με τα γνωστά $\lambda_k$ την λύνω.

⇒ $T_k(t) = e^{-\lambda_k t} \cdot A_k$ δηλ. $\boxed{T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t}}$

→ Για να βρω τα $A_k$, χρησιμοποιώ την (2)

Η λύση μου είναι $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) =$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)} \quad (4)$$

↳ Επεκτείνω την $\phi(x)$ περιττά και αναπτύσσω σε σειρά ημιτόνων

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \\ u(x,0) &\overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A_k = a_k}$$

## ↳ Μη-ομογενής εξ. θερμότητας

$u_t - u_{xx} = f(x,t)$ , $0<x<l$, $t>0$ (5)

$u(x,0) = \phi(x)$ (6)

$u(0,t) = u(l,t) = 0$

**ΛΥΣΗ**: Αναζητώ λύσεις στην μορφή $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ (7)

Αναπτύσσω την $f(x,t)$ σε σειρά ημιτόνων: $f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$

όπου $f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx$

Απο την εξ. (5) παίρνω ότι:

$u_k'(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 u_k(t) = f_k(t)$ και $u_k(0) = a_k$

$$\left.\begin{aligned} (6) &\Rightarrow u(x,0) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ (7) &\Rightarrow u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_k(0) = a_k$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**: Αν έχω μη-μηδενικές συνορ. συνθήκες Dirichlet δηλ. $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$ τότε η

$u(x,t) := u(x,t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1(t) - \frac{x}{l}\mu_2(t)$ , ικανοποιεί εξ θερμότητας με μηδ Dirichlet και έχουμε αναχθεί στο προηγ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ** ⇒ $u_t - u_{xx} = \sin 2x + 1 - \frac{x}{\pi}$ , $0<x<\pi$, $t>0$

$u(0,t) = t$ , $u(\pi,t) = 0$ , $u(x,0) = \sin x$

**ΛΥΣΗ**

Ανάγω το πρόβλημα στην περ των μηδενικών Dirichlet

$V(x,t) = u(x,t) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$

Οποτε η V ικανοποιεί $V_t - V_{xx} = u_t - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) - u_{xx} =$

$= \sin 2x + \cancel{1 - \frac{x}{\pi}} - \cancel{\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)} = \sin 2x$

Άρα έχω $V_t - V_{xx} = \sin 2x \quad , 0<x<\pi, \ t \geq 0$

$V(0,t) = v(\ell,t) = 0$

$V(x,0) = \phi(x) = \sin x$

$f(x,t) = \sin 2x \Rightarrow f_1 = 0$

$f_2 = 1$

$f_k = 0, \ k \geq 3$

$\phi(x) = \sin x \Rightarrow a_1 = 1, \ a_k = 0 \ , k \geq 2$

Άρα πρέπει να λύσω $u_1'(t) + u_1(t) = 0 \ , u_1(0) = 1 \Rightarrow u_1(t) = e^{-t}$

$u_2'(t) + 4u_2 = 1 \ , u_2(0) = 0 \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$

$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \ u_k = 0 \Rightarrow u_k(t) \equiv 0$

Απο την (5) παίρνω ότι: $u_k'(t) + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t) = f_k(t)$ και $u_k(0) = a_k$

Συνεπώς $u(x,t) = u_1(t)\sin x + u_2(t)\sin 2x =$

$= e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}(1 - e^{-4x})\sin 2x$

Οπότε $u(x,t) = v(x,t) + \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t = e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4t}\right)\sin 2x +$

$+ \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t$

## Συνθήκες Neumann

$$u_t - u_{xx} = 0 \;,\; 0<x<\ell,\; t>0$$
$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0,\; t>0$$
$$u(x,0) = \phi(x)$$

↳ Αναζητώ λύση στην μορφή $X(x)T(t) \Rightarrow X'' + \lambda X = 0 \,,\, X'(0) = X'(\ell) = 0$

$\Rightarrow$ (όπως στην κυματική εξ): $\begin{cases} \lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{\ell}\right)^2 \\ X_k = \cos\left(\dfrac{k\pi x}{\ell}\right) \end{cases}$ , $k = 0,1,2,\dots$

$$T_k' + \lambda_k T_k = 0 \Rightarrow T_k(t) = A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\frac{k\pi x}{\ell}$$

Αναπτύσσω την $\phi(x)$ σε σειρά συνημιτόνων:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell} \,,\, k = 0,1,2$$

$\Rightarrow u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$

$\Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{2} \,,\, A_k = a_k$ με $k = 1,2,\dots$

### Για το μη-ομογενές

(1) $u_t - u_{xx} = g(x,t) \,,\, 0<x<\ell,\, t>0$

(2) $u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$

(3) $u(x,0) = \phi(x)$

Αναζητώ λύση στην μορφή: $u(x,t) = \sum_{k=0} u_k(t)\cos\frac{k\pi x}{\ell}$ (4)

$$g(x,t) = \frac{g_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\cos\frac{k\pi x}{\ell} \quad (5)$$

$$(1),(4),(5) \Rightarrow \begin{cases} u_k'(t) + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t) = f_k(t), & k=1,2, \\ u_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \end{cases}$$

Απο (3): $\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$

(4) $\Rightarrow u(x,0) = u_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\cos\frac{k\pi x}{\ell}$

$\Rightarrow \boxed{u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \quad u_k(0) = a_k}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\Rightarrow$ $u_t - u_{xx} = \cos 3x, \ 0<x<\pi$

$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \ u(x,0) = 0$

ΛΥΣΗ

$u_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2}$

$u_0(0) = \frac{a_0}{2}$

$u_k(t) + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k(t) = f_k(t), \ u_k(0) = a_k = 0$

Ολα είναι 0 εκτός απο $k=3$: $u_3'(t) + 9u_3(t) = 1$

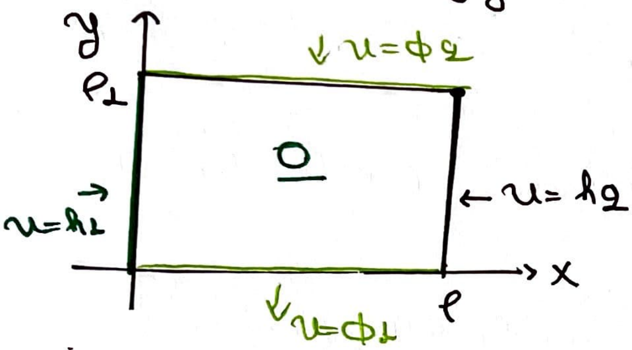
$u_3(t) = \frac{1}{9}(1-e^{-9t})$

$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{9}(1-e^{-9t})\cos 3x$

## ▸ Εξίσωση Laplace

(→ μόνο συνοριακές όχι αρχικές συνθ.)

$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0$ (2 διαστάσεις)




↴ Δεν υπάρχει χρόνος. Η εξίσωση περιγράφει στατικά φαινόμενα. Έχω μόνο συνοριακές αφού δεν υπάρχει χρόνος δεν έχω αρχικές.

▸ Γενικά θα δούμε το πρόβλημα: $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$

$u(0,y)=h_1(y)$, $u(\ell,y)=h_2(y)$, $0<y<\ell$

$u(x,0)=\phi_1(x)$, $u(x,\ell_1)=\phi_2(x)$

→ πρόβλημα Poisson

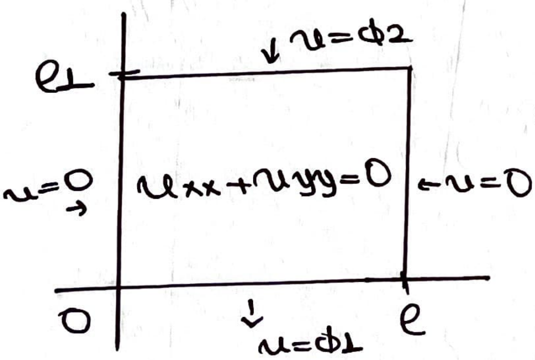
Αν ορίσω:

$$V = u-\left[\frac{\ell-x}{\ell}h_1(y)+\frac{x}{\ell}h_2(y)\right]$$ τότε $V(0,y)=0,\ V(\ell,y)=0$

Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσω την περίπτωση

$h_1=h_2=0$

Κατ' αρχάς μελετώ την περίπτωση $f\equiv 0$ (Αν $\Delta u=0$, $u=$ αρμονική)




Αναζητώ λύση στην μορφή $X(x)Y(y)$

$$X''Y+XY''=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

$$\Rightarrow X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X(\ell)=0$$

$$Y''-\lambda Y=0$$

Όπως πριν $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, $X_k=\sin\frac{k\pi x}{\ell}$, $k=1,2,\dots$

$$Y_k''-\lambda_k Y_k=0 \Rightarrow Y_k(y)=A_k e^{\frac{k\pi}{\ell}y}+B_k e^{-\frac{k\pi}{\ell}y}$$

Άρα $$\boxed{u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi}{\ell}y}+B_k e^{-\frac{k\pi}{\ell}y}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell}}$$

$$u(x,0)=\phi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$
$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin\frac{k\pi x}{\ell}$$
$$\Rightarrow \boxed{A_k+B_k=a_k}$$

Σ

$$u(x,\ell_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi \ell_1}{\ell}}+B_k e^{-\frac{k\pi \ell_1}{\ell}}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell}$$
$$u(x,\ell_1)=\phi_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$
$$\Rightarrow \boxed{A_k e^{\frac{k\pi \ell_1}{\ell}}+B_k e^{-\frac{k\pi \ell_1}{\ell}}=b_k}$$

→ **ΜΗ-ΟΜΟΓΕΝΗΣ:** (1) $u_{xx}-u_{yy}=f(x,y)$ (Βάση το ← σχήμα της προηγ. περ.)

(2) $u(0,y)=u(\ell,y)=0$

(3) $u(x,0)=\phi_1(x)$, $u(x,\ell_1)=\phi_2(x)$

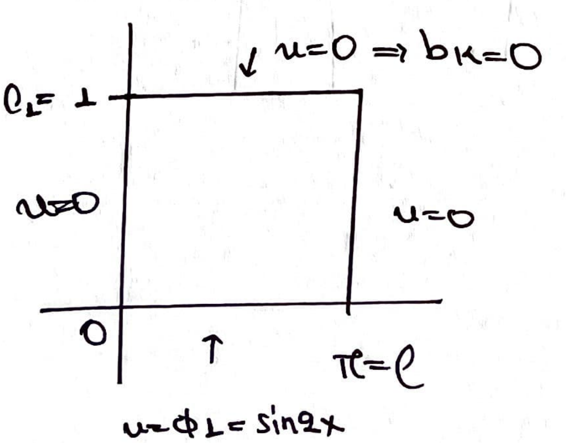
$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \quad k=1,2,3,\dots$$

$$f_k(y)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$$

Αναζητώ λύση στην μορφή: $u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin\frac{k\pi x}{\ell}$

Από (1) $\Rightarrow u_k''-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 u_k=f_k$, $u_k(0)=a_k$, $u_k(\ell_1)=b_k$ $k=1,2,\dots$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ→**




$u_{xx}+u_{yy}=\sin x$

$b_k=0$, $k=1,2,\dots$

$a_2=1$, $a_k=0$ $(k\neq 2)$

$f(x,y)=\sin x \Rightarrow f_1(y)=1$, $f_k=0$, $k\neq 1$

$$u_1''-u_1=1, \quad u_1(\ell)=0, \quad u_1(0)=0$$
$$u_1(y)=C_1 e^{y}+C_2 e^{-y}-1$$
$$\Rightarrow \boxed{C_1=\frac{1}{e+1}, \ C_2=\frac{e}{e+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1(y) = \frac{e^y}{1+e} + \frac{e^{1-y}}{1+e} - 1}$$

$k=2 \mid$ $u_2'' - 4u_2 = 0$, $u_2(0)=1$, $u_2(\ell)=0$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{u_2(y) = \frac{e^{2y}}{1-e^4} - \frac{e^{4-2y}}{1-e^4}}$

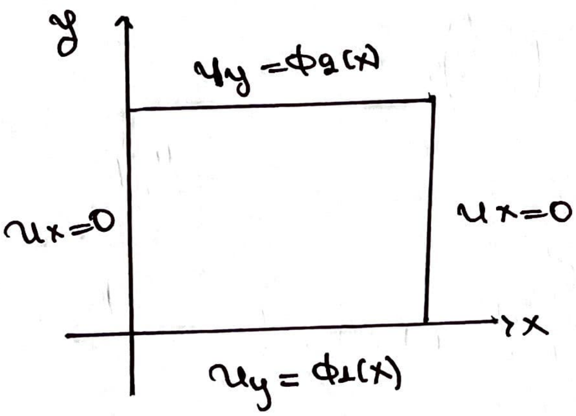
$u_2(y) = C_1 e^{2y} + C_2 e^{-2y}$

Τελικά, $u(x,y) = \left(\frac{e^y}{1+e} + \frac{e^{1-y}}{1+e} - 1\right)\sin x + \left(\frac{e^{2y}}{1-e^4} - \frac{e^{4-2y}}{1-e^4}\right)\sin 2x$

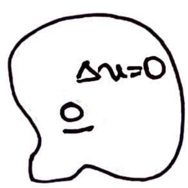
---

## ▸ Συνθήκες Neumann

**Προσοχή σε 2 παρατηρήσεις**




Έστω ότι έχω το γενικό πρόβλημα




$\Delta u = 0$, $\Omega$

$\frac{\partial u}{\partial n} = g$, $\partial\Omega$

▸ Υπενθύμιση ΑΤΠ3 $\Rightarrow$ $\Delta u = \overset{\text{απόκλιση}}{\operatorname{div}} (\nabla u)$

$$0 = \int_\Omega \Delta u \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \vec{n}}_{= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}} \, dx \Leftrightarrow \boxed{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dx = 0}$$

## Α' ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επιστρέφω στο ορθογώνιο, θα πρέπει:

$$\int_0^{\ell} (\phi_1 - \phi_2)\,dx = 0 \rightsquigarrow \text{συνθήκη συμβατότητας}$$

Αν <u>δεν</u> συμβαίνει αυτό <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει λύση!

## Β' ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στα προβλήματα έχουμε μέχρι τώρα, έχει μοναδική λύση. Αν $u$ λύση του προβλήματος με συνθήκες Neumann και η συνάρτηση $u+C$ (= σταθερά) είναι επίσης λύση!

Το υπολογιστικό κομμάτι παραμένει το ίδιο όπως πριν στη λογική του. Δηλαδή αναζητώ λύσεις $X(x)\,Y(y)$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2,\ X_k = \cos\frac{k\pi x}{\ell} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y_k'' - \lambda_k Y = 0 \Rightarrow Y_0 = A_0 + B_0 y$$

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{\ell}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{\ell}},\ k = 1, 2, \dots$$

$$\phi_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$\phi_2 = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$$

και $$u_y(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k'(y)\cos\frac{k\pi x}{\ell} = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k - B_k)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\frac{k\pi}{\ell} \overset{\phi_1}{=}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} \Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{a_0}{2}} \quad (*)$$

$$u_y(x,\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k'(\ell)\cos\frac{k\pi x}{\ell} = B_0 + \sum \frac{k\pi}{\ell}(A_k e^{0} - B_k e^{-0})\cos\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} \Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{b_0}{2}} \quad (**)$$

Η συνθήκη συμβατότητας μας εξασφαλίζει ότι $a_0 = b_0$ και συνεπώς οι σχέσεις (*) & (**) που μας δίνουν το $B_0$ είναι ίδιες.

→ Δεν υπάρχει σχέση που να δίνει το $A_0$ διότι στην λύση μπορούμε να προσθέσουμε μια αυθαίρετη σταθερά (βλ. Β' ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ)

↳ Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές σειρές των συνοριακών τιμών τιμών βρίσκουμε τα $A_k$, $B_k$ για $k \geq 1$.