ΦΥΛΛΑΔΙΟ 19ο/4

Να λυθεί το πρόβλημα Σ.Τ

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<1 \quad (1)$$

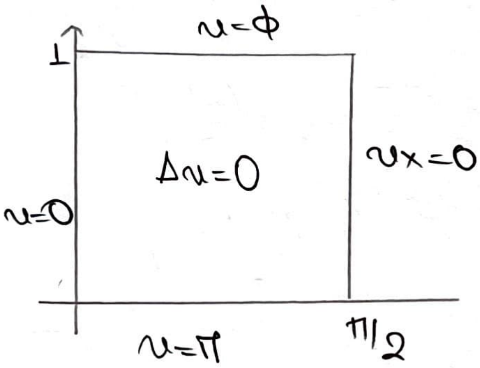
$$u(0,y)=u_x\left(\frac{\pi}{2},y\right)=0,\quad 0<y<\pi \quad (2)$$

μεικτές λύσεις ούτε Dirichlet ούτε Neumann

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<\pi/2 \quad (3)$$

$$u(x,1)=\underbrace{-2\sin x\sinh 1+\sin 3x\sinh 3}_{\phi(x)},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

ΛΥΣΗ



Αναζητώ λύση στην μορφή $X(x)Y(y)\neq 0$

$(1)\Rightarrow X''Y+XY''=0 \Rightarrow \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$

$\Rightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda \Rightarrow$

$$\boxed{X''+\lambda X=0,\ X(0)=0,\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}$$ νέο πρόβλημα ΠΣΤ

και $Y''-\lambda Y=0$

Για την μελέτη της ΠΣΤ: Διακρίνω περιπτώσεις $\lambda<0,\ \lambda=0,\ \lambda>0$

Περ1| Έστω $\lambda<0$ τότε η λύση είναι $X(x)=c_1e^{\sqrt{|\lambda|}x}+c_2e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$

$X(0)=0\Rightarrow c_1+c_2=0$, $X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow c_1\sqrt{|\lambda|}e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}}-c_2\sqrt{|\lambda|}e^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}}-c_2^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}}=0 \end{cases}$$

Ελέγχω την ορίζουσα: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}} & -e^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix} = -\left(e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}}+e^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\neq 0$

Άρα έχω την μοναδική λύση $c_1=c_2=0$. Συνεπώς για $\lambda<0$ ΔΕΝ βρίσκω μη-τετριμμένη λύση.

Περ2 | $\lambda=0$

$X''=0,\ X(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$X(x)=Ax+B,\ X(0)=0 \Rightarrow B=0,\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=A=0$. Άρα ούτε το $\lambda=0$ δίνει μη τετριμμένη λύση

Περ3 | $\lambda<0$

Τότε $X(x)=\cancel{C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)}+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x),\ X(0)=0 \Rightarrow \boxed{C_1=0}$

$X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_2\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$k=1,2,\dots$

$\frac{\sqrt{\lambda}}{2}=k-\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda}=2k-1 \Rightarrow \boxed{\lambda_k=(2k-1)^2}$

Το $C_2=0$ δεν το «θέλω» διότι μου δίνει πάλι μη-τετριμμένη λύση άρα αναγκαστικά παίρνω την 2η επιλογή: $\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right)=0$

Αφού βρήκα τα λ_k, X_k επιστρέφω στην εξίσωση για το y

$Y_k''-\lambda_k Y_k=0 \Rightarrow \boxed{Y_k(y)=A_k e^{(2k-1)y}+B_k e^{-(2k-1)y}}$,

Άρα παίρνοντας και τον γραμμικό συνδυασμό έχω ότι:

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k e^{(2k-1)y}+B_k e^{-(2k-1)y}\right]\sin(2k-1)x} \quad (4)$$

Η $u(x,y)$ όπως δίδεται από την (4) ικανοποιεί τις (1) & (2)

Για να ικανοποιήσω την (3), θα πρέπει να προσδιορίσω τις σταθερές A_k, B_k

$u(x,0)\overset{(4)}{=}\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin(2k-1)x\overset{(3)}{=}0 \Rightarrow A_k+B_k=0,\ k=1,2,\dots$

$u(x,1)\overset{(4)}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{(2k-1)}+B_k e^{-(2k-1)}\right)\sin(2k-1)\,x\overset{(3)}{=}$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2kx)$$

$$\boxed{\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}}$$ → Τύπος υπερβολικού ημιτόνου

Πιο γενικές εξισώσεις:

π.χ./ $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0 \quad , t>0, 0<x<\pi$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = \sin x, \; u_t(x,0) = \sin 3x \quad , 0<x<\pi$

ΛΥΣΗ

$X(x)T(t)$: $X''T - XT'' + 2XT' + XT = 0 \Rightarrow -\frac{X''}{X} + \frac{T''}{T} + 2\frac{T'}{T} + 1 = 0$

$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} + 2\frac{T'}{T} + 1 = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} \lambda_k = k^2 \\ X_k = \sin(kx) \end{matrix}}, k = 1,2,\ldots$

Στην συνέχεια λύνω: $T'' + 2T' + (1+\lambda_k)T = 0 \Rightarrow$

$T_k'' + 2T_k' + (1+k^2)T_k = 0$

ΧΠ $= 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + (1+k^2) = 0 \quad , \Delta = 4 - 4(1+k^2) = -4k^2$

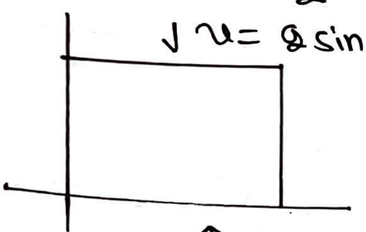
$\lambda_{1,2} = -1 \pm ik \Rightarrow T_k(t) = A_k e^{-t}\cos(kt) + B_k e^{-t}\sin(kt)$

Άρα $u(x,t) = e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \sin(kx)$

κλπ κάνοντας Fourier 2 βρίσκω τα υπόλοιπα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΣΚΗΣΗΣ 4/ΦΥΛΛΑΔΙΟ 12º

$$\sinh a = \frac{e^{a}-e^{-a}}{2} \Big\} \text{ υπερβολικό ημίτονο}$$



$u = 2\sinh 1 \sin x + \sinh 3 \sin 3x$

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k e^{2k-1} + B_k e^{-(2k-1)}\right]\sin(2k-1)x =$$
$$= (e-e^{-1})\sin x + \frac{1}{2}(e^{3}-e^{-3})\sin 3x$$

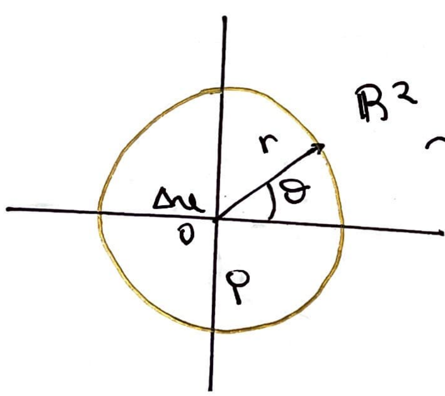
$$u=0 \rightsquigarrow u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k + B_k\right]\sin(2k-1)x = 0 \Rightarrow A_k + B_k = 0$$
$k=1,2,\dots$

Για $k=1$| $A_1 e + B_1 e^{-1} = e - e^{-1} \rightsquigarrow A_1 + B_1 = 0$

Για $k=2$| $A_2 e^{3} + B_2 e^{-3} = \frac{1}{2}(e^{3}-e^{-3}) \rightsquigarrow A_2 + B_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 1,\ B_1 = -1 \\ A_2 = \frac{1}{2},\ B_2 = -\frac{1}{2} \\ A_k = B_k = 4,\ k \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Η λύση είναι

$$\boxed{u(x,y) = (e^{y}-e^{-y})\sin x + \frac{1}{2}(e^{3y}-e^{-3y})\sin 3x}$$



$\rightsquigarrow$ $u = \phi \cdot$ γων

$u(x,y) = V(r,\theta)$

$V(\rho,\theta) = \phi(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < r < \rho$

$$u_x = V_r \frac{\partial r}{\partial x} + V_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1)$$

πχ/ $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2}$$

$\Big\} \Rightarrow$ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$

$1 \Rightarrow V_r \frac{x}{r} - V_\theta \frac{y}{r^2}$

Τελικά μετά από πράξεις $u_{xx}+u_{yy} = V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta}$

Οπότε έχω να λύσω το πρόβλημα: $V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = 0$

με $0 \le \theta < 2\pi, 0 < r, \rho$, $V(\rho,\theta) = \phi(\theta)$

Θέλω το $\lim_{\theta \to 2\pi} V(\rho,\theta) = V(\rho,0)$ και το $\lim_{\theta \to 2\pi} V_\theta(\rho,\theta) = V(\rho,\theta)$

Επίσης ζητάω: η $V(r,\theta)$ να είναι φραγμένη σε όλο το B_ρ

Αναζητώ λύση στην μορφή: $V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0 \Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \Rightarrow$

$\frac{r^2 R''}{R} + r\frac{R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$ σταθ (*)

$\Rightarrow \Theta'' + \lambda\Theta = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$

συνθήκες περιοδικότητας

Μελετώ το πρόβλημα, δηλαδή διακρίνω περιπτώσεις ($\lambda<0, =0, >0$)

Καταλήγω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = k^2, \ k = 0,1,2 \\ \Theta_0 = \frac{a_0}{2} \sim k=0 \\ \Theta_k(\theta) = a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \end{array} \right\}$$

Από (*) έχω: $r^2 R''(r) + r R'(r) + k^2 R(r) = 0$: τύπος Euler

$$\left. \begin{array}{l} r = e^t \\ R(r) = y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_k(r) = c_1 r^k + c_2 r^{-k}$$

Επιλέγω $c_2=0$ ώστε η $R(r)$ να μην απειρίζεται στο $r=0$

$\Rightarrow R_k(r) = c_1 r^k \;/\; R_k(r) = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$

Άρα (αφού $\forall\, k$ έχω λύση, άρα και το άθροισμα θα είναι λύση λόγω γραμμικότητας και ομογένειας) τότε:

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \left(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\right)} \quad (**)$$

Για να βρω a_k, b_k, εφαρμόζω την συνοριακή συνθήκη

$V(\rho,\theta) = \phi(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$

$$V(\rho,\theta) \overset{(**)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\right)$$

$$V(\rho,\theta) = \phi(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta)\right)$$