ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 13/02/2022

▸ Εξισώσεις που ανάγονται σε εξ. χωρισμό μεταβλητών

(I) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(\underbrace{ax+by}_{z})}$ $, a, b \in \mathbb{R}$

Εισάγω νέα μεταβλητή $z(x) = ax + by(x)$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx \quad \text{κλπ}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

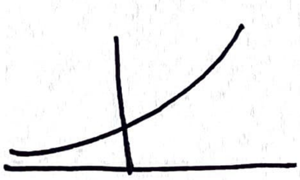
1) Βρείτε την γενική λύση της $y' = 2x + y$

$$z = 2x + y \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} z' = 2 + y' = 2 + z$$

και

$\dfrac{dz}{z+2} = dx$ (λύνω σαν χωρ. μεταβλ.) $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + c$

$\ln|z+2| = x + c \Rightarrow |z+2| = e^c e^x \Rightarrow z+2 = \pm e^c e^x, c \in \mathbb{R}$ (τυχαίο)

e^c 

$-\infty < c < +\infty$ το e^c παίρνει οποιαδ. θετική τιμή

το $-e^c$ —"— αρνητική "

Μπορώ να το γράψω ισοδύναμα: $\Leftrightarrow z+2 = \bar{c}e^x, \ \bar{c} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (1)

↑ οποιοδήποτε $c \neq 0$

- Τι συμβαίνει στην περίπτωση $\tilde{c}=0$ τότε $z+2=0 \Rightarrow \boxed{z=-2}$
Παρατηρώ ότι $(-2)' = 2+(-2)=0$ άρα και η σταθερή συνάρτηση
$z(x)=-2$ είναι επίσης λύση!

Συνεπώς επιστρέφω στην (1) και γράφω ότι:
$z+2 = \tilde{c}e^x, \tilde{c}\in\mathbb{R}$

Απο εδώ και πέρα γράφω c αντί για $\tilde{c}$. Άρα $z = ce^x - 2$

$\Leftrightarrow 2x+y = ce^x - z \Rightarrow \boxed{y = ce^x - 2x - 2}$ Γενική λύση της $y' = 2x+y$

II $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

Θέτω $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Δηλαδή $y = z\cdot x$, $y' = z'x + z\cdot \cancel{x'}^{\to 1}$
$\underbrace{\quad}_{\substack{\| \\ f(z)}}$

Δηλαδή $z'x + z = f(z)$
$z'x = f(z) - z \Rightarrow \dfrac{dz}{f(z)-z} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow$ κλπ

πχ/ Βρείτε την γενική λύση της $y' = \underbrace{\dfrac{y}{x}}_{\|} + 1$

$z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = z\cdot x \Rightarrow y' = z'\cdot x + z = z+1$

$z'x = 1 \Rightarrow dz = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int dz = \int \dfrac{dx}{x} + c \Rightarrow \boxed{z = \ln|x| + c}$

$\Rightarrow y = z\cdot x = x\ln|x| + cx, \ c\in\mathbb{R}$

Έστω ότι έχουμε επιπλέον $y(1)=2$
Για $x=1$: $y(1) = 1\cancel{\ln 1}^{\,0} + c\cdot 1 = c$ $\Big\} \Rightarrow c=2 \Rightarrow y(x) = x\ln|x| + 2x$

ΟΡΙΣΜΟΣ $\mapsto$ Η $M(x,y)$ είναι ομογενής, m βαθμού αν
$$M(kx,ky) = k^m M(x,y)$$

π.χ./ η $M(x,y) = \dfrac{x}{y}$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού $(m=0)$

Έστω ότι $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενής βαθμού m.

Έστω η Σ.Δ.Ε τότε, $y' = \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)} = \dfrac{M\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right)}{N\left(x\cdot 1, x\frac{y}{x}\right)} = \dfrac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

π.χ./ $y' = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$, άρα θέτω $z=\dfrac{y}{x}$ 2 γράφω

την Δ.Ε ως προς z : $z'x+z = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{1+z^2}{1-z-z^2-z^3}\,dz = \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \dots$$

III $\quad \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

ΔΙΑΚΡΙΝΩ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(Α) Οι ευθείες $a_ix\,b_i+c_i$, $i=1,2$, τέμνονται στο σημείο (x_*, y_*)

Τότε θέτω $\left.\begin{array}{l} \xi = x-x_* \\ \eta = y-y_* \end{array}\right\}$ $\quad \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{dy}{dx}$

και $\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}\right)$

Άρα έχω αναχθεί στην περίπτωση II

B Αν οι ευθείες $a_i x + b_i y + c_i$, $i = 1, 2$ είναι παράλληλες

δηλ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ τότε

$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{k(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right) = F(a_1 x + b_2 y)$ ε έχω αναχθεί στην περίπτωση I

▸ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε $1^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

$y'(x) + p(x)y = 0$ (ομογενής) ή $y'(x) + p(x)y = f(x)$ (Γενική περίπτωση μη-ομογενής)

↳ ΟΜΟΓΕΝΗΣ: Ας δούμε την ομογενή

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$y(x) = \pm e^c e^{-\int p(x)dx}$$

Όπως πριν $y = \bar{c} e^{-\int p(x)dx}$, $\bar{c} \in \mathbb{R} - \{0\}$

Ελέγχω εάν το 0 είναι λύση, όπου είναι. Άρα η λύση του ομογενούς είναι η $y_{o\mu}(x) = c e^{-\int p(x)dx}$, $c \in \mathbb{R}$

→ Πως μπορώ να λύσω την μη-ομογενή;

$y' + p(x)y = f(x)$ (1)

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $y_\mu(x)$ λύση της μη-ομογενούς (1) τότε και η $y_{o\mu} + y_\mu$ είναι λύση της μη ομογενούς επίσης!

Και αυτές οι λύσεις είναι όλες.

Αρκεί λοιπόν να βρούμε μια (οποιαδήποτε) μερική λύση της (1)

→ <u>Μέθοδος Μεταβαλλόμενων συντελεστών</u>

Η λύση της ομογενούς είναι η $y_{o\mu} = ce^{-\int p(x)dx}$

Αναζητώ μερική λύση της (1) στην μορφή $y_\mu = c(x)e^{-\int p dx}$

Βάζω την y_μ στην (1)

$$y_\mu' = c' e^{-\int p dx} \cancel{- c(x)p(x) e^{-\int p dx}} + \cancel{p c(x) e^{-\int p dx}} = f(x)$$

$$c'(x) e^{-\int p dx} = f(x) \Rightarrow c'(x) = e^{\int p(x)} f(x) \Rightarrow c'(x) = e^{\int p(x)} f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{c(x) = \int f(x) e^{\int p(x) dx} + c}$$

Άρα, $y_\mu(x) = e^{-\int p dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + c e^{-\int p(x) dx}$

↳ Άλλος τρόπος εύρεσης μερικής λύσης

$\left(e^{\int p\, dx}\right)' = p e^{\int p dx}$. Πολ/ζω την (1) με $e^{\int p dx}$

$$\underbrace{e^{\int p dx} y' + p e^{\int p dx} y}_{} = e^{\int p dx} f$$

$$\left(e^{\int p dx} y\right)' = e^{\int p dx} f \Rightarrow e^{\int p dx} y = \int e^{\int p dx} f + c \Rightarrow$$

6

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int p\,dx} \int e^{\int p\,dx} f(x)\,dx + c e^{-\int p\,dx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Διαφορικές Εξισώσεις

Τρίτη 14/02/2023

▸ Γραμμική Δ.Ε 1ης Τάξης (συνέχεια)

$y' + p(x)y = 0$ ή $f(x)$

Για την λύση της ομογενούς έχουμε 2 τρόπους

1) Μέθοδος Μεταβαλλόμενων σταθερών

Έχω $y_{ομ} = ce^{-\int p(x)dx}$ και αναζητώ λύση της μη-ομογενούς στην μορφή: $\boxed{y = c(x)e^{-\int p(x)dx}}$

2) Εφαρμόζω παράγωγο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης πολ/ζοντας με $e^{\int p(x)dx}$ οπότε έχω:

$$\underbrace{y'e^{\int p dx} + pe^{\int p(x)dx}y}_{=} = e^{\int p dx}\cdot f$$

$$\left(e^{\int p dx}y\right)' = e^{\int p(x)dx}f$$ και ολοκληρώνω

- Κάποιες φορές η αναγνώριση της παραγώγου γίνεται με παρατήρηση!

Παράδειγμα $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2$

Λύση

Λύνω ομογενή $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{y_{ομ}(x) = cx,\ c\in\mathbb{R}}$

Τώρα πρέπει να βρω μερική λύση, θα το κάνω 2 με τους 2 τρόπους:

1ος ΤΡΟΠΟΣ | Αναζητώ λύση της μορφής $y_\mu = c(x)\cdot x$

Πάω στην εξίσωση μου: $[c(x)\cdot x]' - \frac{c(x)\cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = x^2 \Rightarrow$

(2 αντικαθιστώ όπου y αυτό που βρήκα)

$\Rightarrow c'x + \cancel{c} - \cancel{c} = x^2 \Rightarrow c' = x$

Άρα, $\boxed{c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1}$

Άρα $y_\mu = \frac{1}{2}x^3 \ (+c_1 x)$. Συνεπώς, η γενική λύση της μη-ομογενούς είναι $y = y_{o\mu} + y_{\mu\varepsilon\rho} = cx + \frac{1}{2}x^3 \ (+c_1 x)$

δεν είναι υποχρ να την βάλω γιατί έχω ήδη μία αυθαίρετη

2ος ΤΡΟΠΟΣ

Φτιάχνω τετράγωνο στο αριστερό μέλος

$y' - \frac{y}{x} = x^2 \ , \ \frac{xy' - y}{x} = x^2 \iff \underbrace{\frac{xy' - y}{x^2}}_{\left(\frac{y}{x}\right)'} = x$

(ομώνυμα)

$\iff \left(\frac{y}{x}\right)' = x \xLeftrightarrow{\text{ολοκληρώνω}} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x^2 + c$

Επειδή μια μερική λύση είναι αρκετή επιλέγω:

$$c=0 \Rightarrow y_{με} = \frac{1}{2}x^3$$

Οπότε $y = y_{ομ} + y_{μ} = \frac{1}{2}x^3 + cx$

(I) Εξίσωση Bernoulli: $\boxed{y' + p(x)y = f(x)y^n,\ n \neq 1}$

· Με Μέθοδο

ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ: $z = y^{1-n}_{(x)}$ → αυτό θα ψάχνω για να βρω την y

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \cdot y' = (1-n)y^{-n}[f(x)y^n - p(x)y]$$

(λύνω ως προς y') $= (1-n)f(x) - (1-n)y^{1-n}p(x)$, $y^{1-n} = z$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)}$$ → ως προς z είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξεως

(II) Εξίσωση Riccati: $\boxed{y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)}$ (*)

· Δεν υπάρχει γενική μέθοδος που δίνει την λύση.

Όμως: εαν ξέρω μια λύση μπορώ να τις βρω όλες

Αν πχ: Γνωρίζω οτι η συνάρτηση $y_1(x)$ ικανοποιεί την (*)

τότε αναζητώ τις άλλες λύσεις στην μορφή: $\boxed{y = y_1 + z}$

Αντικαθιστώ την y στην (*) και έχω:

$$y_1' + z' + py_1 + pz + qy_1^2 + 2qyz + qz^2 = f(x)$$

Επειδή είναι λύση φεύγουν

Άρα $z'+(p+2qy_1)z+qz^2=0$ που είναι Bernoulli με $n=2$

Παράδειγμα 1 $y'=\underbrace{1+x^2}_{\rho(x)}-2xy+y^2 \to$ Riccati

ΛΥΣΗ

Μπορώ να γράψω

$\Rightarrow y'=1+(\overset{z}{x-y})^2$

Παρατηρώ ότι η $y_1=x$ είναι λύση

→ Αναζητώ λύσεις στην μορφή $\boxed{y=x+z(x)}$ $(\Rightarrow y'=1+z')$

$\cancel{1}+z'=\cancel{1}+z^2 \Leftrightarrow z'=z^2 \Rightarrow \int\frac{dz}{z^2}=\int dx \Rightarrow -\frac{1}{z}=x+c$

Άρα $z=-\frac{1}{x+c}$ και $z=0$

Άρα $\boxed{y=-\frac{1}{x+c}+x}$ και $\boxed{y=x}$

2 $y'=-\frac{2}{x^2}+y^2$ (Riccati) (1)

ΛΥΣΗ

Αναζητώ λύσεις στην μορφή $y=\frac{1}{x}+z$, $y_1(x)=\frac{1}{x}$

$-\cancel{\frac{1}{x^2}}+z'=-\cancel{\frac{2}{x^2}}+\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{2z}{x}+z^2 \Rightarrow \boxed{z'=\frac{2}{x}z+z^2}$ (2)

Αλλαγή μεταβλητής (Bernoulli με $n=2$)

$u=z^{1-2}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow \boxed{z=\frac{1}{u}}$

$$\left.\begin{aligned} z'&=\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2} \\ \frac{2}{x}z+z^2&=\frac{2}{xu}+\frac{1}{u^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{u'}{u^2}=\frac{2}{xu}+\frac{1}{u^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{-u' = 2\frac{u}{x} + 1}$ (Γραμμική 1ης τάξης) (3)

Βρίσκω λύση ομογενούς : $u' + \frac{u}{x} \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -2\frac{u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -\frac{2dx}{x}$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{u_{ομ}(x) = \frac{c}{x^2}}, \; c \in \mathbb{R}$

Για να βρώ της μη ομογενούς την λύση χρησιμοποιώ την μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών

$u_\mu = \frac{C(x)}{x^2} \Rightarrow -\left(\frac{C(x)}{x^2}\right)' = 2\frac{C(x)}{x^3} + 1 \Rightarrow -\frac{c'x^2 - 2xc}{x^4} = \frac{2c}{x^3} + 1$

$\Leftrightarrow -\frac{c'}{x^2} = 1 \Rightarrow C(x) = -\frac{1}{3}x^3$ (Δεν με ενδιαφέρει να βάλω σταθερά εδώ γτ θέλω 1 γενική λύση)

Συνεπώς, $u_\mu = \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2} = -\frac{1}{3}x$

Οπότε $u(x) = u_{ομ} + u_{μερ} \Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{3}x}$ Η λύση της 3

Η λύση της (2) είναι : $z = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{c}{x^2} - \frac{1}{3}x} = \frac{x^2}{c - \frac{1}{3}x^3} = \frac{3x^2}{c - x^3}$

Τέλος η λύση της (1) είναι η $y = \frac{1}{x} + z$. Δηλαδή

$\boxed{y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x}}$ και $\boxed{y = \frac{1}{x}}$

τελική απάντηση ✓