Γραμμικές Εξισώσεις (συνέχεια)

Τρίτη 28/02/2023

$$(E): \boxed{L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0}$$, $p_i(x)$ συνεχείς συναρτήσεις

(Σ): $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(x) = y_{0(n-1)}$ με $i = 1, \dots, n$
(συνθήκες)

Ορισμός ⟼ Έστω οι συναρτήσεις $y_1, y_2, \dots, y_n$ που είναι $(n-1)$ φορές παραγωγίσιμη.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

← «παίζει» με γρ. ανεξαρτησία ή εξάρτηση

nxn ορίζουσα - Βρονσκιανή (Wronskian)

Θεώρημα ⟼ Αν οι ((n-1)-φορές παραγωγίσιμες) συναρτήσεις $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο $[a,b]$ τότε $W(x) = 0$ στο $[a,b]$.

Απόδειξη: Επειδή, οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμ. εξαρτημένες υπάρχουν σταθερές $a_1, \dots, a_n$ (όχι όλες $= 0$) έτσι ώστε:

$$(6)\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) = 0 \\ a_1 y_1'(x) + a_2 y_2'(x) + \dots + a_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ a_1 y_1^{(n-1)}(x) + a_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array} \right\}$$ n εξισώσεις

(ομογενές 2 τα 2 μέλη $= 0$)

Το (6) το «βλέπω» σαν ένα σύστημα (6) με αγνώστους τις σταθερές $a_1, a_2, \dots, a_n$. Το (6) είναι ομογενές και έχει μη (ταυτοτικά) μηδενική λύση $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι 0. Δηλαδή, $W(x) \equiv 0$. Επειδή $x \in [a,b]$ τυχαίο, άρα $W(x) \equiv 0$ για $x \in [a,b]$. (Γενική ιδιότητα δεν χρησιμοποίησα κάποια Δ.Ε (Ε).)

ΘΕΩΡΗΜΑ → Αν οι γραμ. ανεξ στο $[a,b]$ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ($(n-1)$-φορές παρ/μες), επιπλέον είναι λύσεις της (Ε), τότε $W(x) \neq 0 \; \forall x \in [a,b]$.

Απόδειξη → (Με απαγωγή σε άτοπο).

Έστω ότι σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a,b]$, $W(x_0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα (6) επιδέχεται μη τετριμμένη, δηλαδή ταυτοτικά μηδέν, λύση $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Σχηματίζω την συνάρτηση $\tilde{y} = a_1 x_1 + \dots + a_n y_n$ (= γραμ. συνδ λύσεων)

Η $\tilde{y}$ είναι λύση της (Ε) με αρχ. συνθήκες:

$$\tilde{y}(x_0) = a_1 y_1(x_0) + \dots + a_n y_n(x_0) = 0$$

$$\tilde{y}'(x_0) = a_1 y_1'(x_0) + \dots + a_n y_n'(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$\tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = a_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Σχηματίζω την συνάρτηση $\tilde{y} = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$.

Η $\tilde{y}$ είναι λύση της (Ε) με αρχ. συνθήκες. Άρα $\tilde{y}(x)=0$ και είναι μοναδική (λόγω μοναδικότητας). Δηλαδή,

$$\tilde{y}(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n$ γραμμ. εξαρτημένες $\Rightarrow$ Άτοπο!

Παρατηρηση → Αν οι γραμμικά ανεξάρτητες $y_1, \ldots, y_n$ ΔΕΝ είναι λύσεις της (Ε) τότε, ΔΕΝ είναι απαραίτητο ότι $W(x) \neq 0$. (βλ.: Ασκηση 1 / φυλ 4)

Θεωρημα → Αν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ γραμμικά ανεξ. λύσεις της (Ε) τότε η γενική λύση της (Ε) είναι ο γραμμικός συνδυασμός των y_i δηλαδή, $\boxed{\underbrace{y_{\gamma o}}_{\text{λύση γραμμικής ομογενής}} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)}$

Αποδειξη → Έστω μία λύση της (Ε) η $\tilde{y}$, δηλ $L(\tilde{y})=0$ που ικανοποιεί την αρχ. συνθήκες $\tilde{y}(x_0)=a$, $\tilde{y}'(x_0)=a_1, \ldots,$ $\tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$. Θα δείξω ότι η $\tilde{y}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $y_1, \ldots, y_n$. Έστω το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) &= a_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) &= a_1 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_n) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= a_{n-1} \end{aligned}\right]$$

Πότε υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$?

$\boxed{\text{Αρκεί η συνθήκη } W(x_0) \neq 0}$

Όμως $W(x_0)\neq 0$, αφού οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμ. ανεξ λύσεις της (Ε). Συνεπώς υπάρχουν μοναδ. σταθερές $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$. Η συνάρτηση $\boxed{y^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* y_i}$, λύνει την (Ε) και ικανοποιεί τις ίδιες αρχ. συνθήκες με την $\tilde{y}$, δηλαδή $y^*(x_0)=a_0$, $y^{*\prime}(x_0)=a_1$ κλπ

Από μοναδικότητα της λύσης: $\tilde{y} = y^* = \sum_{i=1} c_i^* y_i(x)$.

Ηθικό Δίδαγμα: Αν στην (Ε) έχω βρει n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τα έχω βρει όλα.

Μέθοδος Υποβιβασμού Τάξης: Αν έχω βρει μια λύση της (Ε), έστω την $\phi(x)$, τότε η αντικατάσταση $y(x)=z(x)\cdot\phi(x)$ μου δίνει εξίσωση όπως η (Ε) αλλά $(n-1)$-τάξης.

π.χ. $(n=2)$ $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ και έστω $\phi(x)$ λύση. Θέτω $y = z\phi$.

$$y = z\phi,\quad y' = z'\phi + z\phi',\quad y'' = z''\phi + zz'\phi' + z\phi'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{z''\phi + zz'\phi' + z\phi''}_{y''} + \underbrace{p_1 z'\phi + p_1 z\phi'}_{y'} + p_2 z\phi = 0$$

$$z(\underbrace{\phi'' + p_1\phi' + p_2\phi}_{=0})$$

$\Leftrightarrow \phi z'' + (z\phi' + \varphi_1\phi) z' = 0$

Αν $z' = u$ $\phi u' + (z\phi' + \varphi_1\phi) u = 0$ (είναι 2 γραμμ. & χωριζόμενων μεταβλητών)

Γραμμικές Εξισώσεις Με $\boxed{\text{Σταθερούς}}$ Συντελεστές

(*) $\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (όχι συναρτήσεις)

Αναζητώ λύσεις στην μορφή : $\boxed{e^{kx} = y}$. Αν την βάλω στην (*) έχω: $k^n \cancel{e^{kx}} + a_1 k^{n-1} \cancel{e^{kx}} + \dots + a_n \cancel{e^{kx}} = 0$

(Απλοποιώ το e^{kx} επειδή είναι πάντα $\neq 0$)

$\Rightarrow \underline{k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0}$] → χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Αρκεί να βρω μόνο τη λύσεις του αλγεβρικά