ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 06/03/2023

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ

(*) $\boxed{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0}$, $a_i\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Ψάχνω λύσεις της μορφής : $\boxed{y=e^{kx}}$, $k\in\mathbb{C}$

Βάζοντας την $y=e^{kx}$ στην (*) καταλήγω στο χαρακτηριστικό (χ.π) πολυώνυμο : $k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$

Άρα το k πρέπει να είναι ρίζα του χ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Βρείτε την γεν. λύση της $y'''-y'=0$

ΛΥΣΗ

Το χ.π είναι $k^3-k=0 \Leftrightarrow k(k^2-1)=0 \Leftrightarrow k(k-1)(k+1)=0$ άρα έχω 3 λύσεις: $k=0$, $k=1$, $k=-1$ και $y_1=e^0=1$, $y_2=e^x$, $y_3=e^{-x}$

(Αφού είναι 3ης τάξης θα έχει πάντα 3 ακριβώς λύσεις, γραμμικώς ανεξάρτητες (δεν θα έχει παραπάνω))

Η γενική λύση θα είναι: $y_{γo}=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$

Περίπτωση Πολλαπλών Πραγματικών Ριζών

Έστω ότι το χ.π της (*) δηλαδή το: $k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$ (1) έχει την ρίζα k_1 με πολλαπλότητα m.

"μπορώ να βγάλω κοινό παράγοντα k^m

(A) Ας υποθέσουμε ότι $k_1=0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$k^n+a_1k^{n-1}+\dots+a_{n-m}k^m=k^m\left(k^{n-m}+\dots+a_{n-m}\right)=0 \text{ με } a_{n-m}\neq 0$$

Άρα η Δ.Ε (*) είναι η:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-m}y^{(m)}=0 \quad (2)$$ (όση είναι η πολλαπλότητα τόσες είναι οι λύσεις)

<u>Προφανείς λύσεις</u>: της (2) $\underbrace{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}}_{m \text{ το πλήθος}}$

(B) Έστω ότι $k_1\neq 0$ (γενική περίπτωση). Τότε αναζητώ λύσεις στην μορφή: $\boxed{y(x)=Z(x)e^{k_1x}}$

Για να προχωρήσω (χωρίς πολλές πράξεις), έστω $n=2$.

Δηλαδή, έχω την $y''+a_1y'+a_2y=0$ και έστω $m=2$.

Για $y=ze^{k_1x}$ ($y'=z'e^{k_1x}+k_1ze^{k_1x}$, $y''=z''e^{k_1x}+2k_1z'e^{k_1x}+k_1^2ze^{k_1x}$)

$$z''+\underbrace{(2k_1+a_1)}_{=0}z'+\underbrace{(k_1^2+a_1k+a_2)}_{=0}z=0$$

(συνέχεια ⟶)

Άσκηση: Αν $P(x)$ πολυώνυμο και x_0 είναι διπλή (m-πλή) ρίζα τότε $P(x_0)=0$, $P'(x_0)=0$. (Για την m-πλή: $P(x_0)^{(2)}=\dots=P_{(x_0)}^{(m-1)}=0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ⟹ Αν x_0 διπλή ρίζα τότε $P(x)=\underline{(x-x_0)^2}\cdot Q(x)$ όπου $Q(x)$ πολυώνυμο

αφού είναι 2πλή ρίζα γράφεται έτσι

$$P'(x)=2(x-x_0)Q(x)+(x-x_0)^2Q'(x)$$
$$=(x-x_0)\left[2Q(x)+(x-x_0)Q'(x)\right]\Rightarrow \boxed{P'(x_0)=0}$$

αφού το πολυώνυμο μηδενίζει σ' αυτό το σημείο Άρα μηδενίζει 2η παράγωγος

(συνέχεια B)

Άρα η Δ.Ε : $z''=0$ και έχω αναχθεί στην περίπτωση A

Συνεπώς οι λύσεις είναι $z(x)=1$ και x

Τελικά, $y_1=e^{k_1x}$ και $y_2=xe^{k_1x}$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γεν. λύση της Δ.Ε : $y'''-3y''+3y'-y=0$

Λύση

Το χ.π είναι $k^3-3k^2+3k-1=0$ δηλ $(k-1)^3=0$. Άρα έχω 3-πλή ρίζα.

Άρα οι γραμ. ανεξ λύσεις είναι: $y_1=e^x, y_2=xe^x, y_3=x^2e^x$

▷ Περίπτωση Πολλαπλών Μιγαδικών Λύσεων

Αν $k_1=a+iB$ τότε και η $k_2=a-iB$ είναι επίσης ρίζα του χ.π. Τότε οι λύσεις είναι: $e^{k_1x}=e^{ax}e^{iBx}=e^{ax}(\cos Bx+i\sin Bx)$

$e^{k_2x}=\ldots=e^{ax}(\cos(Bx)-i\sin(Bx))$

$\Rightarrow$ $e^{ax}\cos(Bx)$ είναι λύση (προσθέτοντας)

ή $e^{ax}\sin(Bx)$ —"— (αφαιρώντας)

⇝ Αν έχω μιγαδική ρίζα $k=a\pm iB$ πολλαπλότητας m τότε οι λύσεις είναι: $\underbrace{e^{ax}\cos Bx, xe^{ax}\cos Bx, \ldots, x^{m-1}e^{ax}\cos Bx}_{2m}$,

$\underbrace{e^{ax}\sin(Bx), xe^{ax}\sin(Bx), \ldots, x^{m-1}e^{ax}\sin Bx}_{2m}$

Σύνολο: $2m$ γρ. ανεξ. λύσεις!

Παραδειγμα:

Να βρεθεί η γεν. λύση της: $y^{(4)}+2y''+y=0$

ΛΥΣΗ

χ.π: $k^4+2k^2+k=0 \Leftrightarrow (k^2+1)^2=0$

Αρα $k_1=\pm i$ διπλές ρίζες $\left(i=\underset{\underset{\alpha}{\|}}{0}\pm\underset{\underset{\beta}{\|}}{1}\, i\right)$ οπου $\alpha=0$ και $\beta=\pm1$

Οι 4 γραμ. ανεξ λύσεις είναι: $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$

Εξισωσεις Euler

Για να είναι Euler θα πρέπει: οποία είναι η τάξη της παραγώγου είναι και η δύναμη του x

$$x>0$$

$$\boxed{(\varepsilon):\ x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=0}$$

οπου $a_i\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (σταθερές)

Η (ε) ανάγεται σε γραμμική με σταθερούς συντελεστές

Έστω $x=e^t \Leftrightarrow t=\ln x$ και έστω $y(x)=z(t)$.

Έστω $n=2$ (για να αποφύγω τις πράξεις). Αρα έχω την:

$$\boxed{x^2y''+a_1xy'+a_2y=0}$$

Παραδειγμα Εστω η $x^2y''+\frac{5}{2}xy'-y=0$, $x>0$ (*)

$y(x)=z(t)$, $t=\ln x$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

ΛΥΣΗ

(κανόνας Αλυσίδας)

$$y'=z'\frac{dt}{dx}=\frac{z'}{x}$$

$$y''_{(x)}=\left(\frac{z'}{x}\right)'=\frac{z''\frac{dt}{dx}}{x}-\frac{z'}{x^2}=\frac{1}{x^2}(z''-z')$$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}\frac{1}{\cancel{x^2}}(z''-z')+\frac{5}{2}\cancel{x}\frac{z'}{\cancel{x}}-z=0 \Leftrightarrow (z''-z')+\frac{5}{2}z'-z=0$$

$$z'' + \frac{3}{2} z' - z = 0$$

$$\chi\Pi = 0 \Rightarrow k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0 \Leftrightarrow (k+2)\left(k - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_1 = 2,\ k_2 = \frac{1}{2}}$$

Άρα $z_1(t) = e^{-2t}$, $z_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}$

$$y_1(x) = z_1(\ln x) = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$y_2(x) = z_2(\ln x) = e^{\frac{1}{2}\ln x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Άρα, η γενική λύση της (*) είναι: $\boxed{y_{o\gamma} = c_1 x^{-2} + c_2 x^{\frac{1}{2}}}$

Μη-Ομογενείς Γραμμικές Δ.Ε

$$\boxed{L[y] = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f} \quad (*)$$

(Επιτρέπω οι συντελεστές $p_i(x)$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις)

Θεώρημα → Η γενική λύση της (*) είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης και της γενικής λύσης της ομογενούς

$$\boxed{y_\gamma = y_{\gamma o} + y_\mu}$$

→ Για την ομογενή ΔΕΝ έχουμε να πούμε κάτι άλλο. Άρα, πως μπορώ να βρω μια μερική λύση;

ΙΔΕΑ: Αν γνωρίζω ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (ομογενούς) (*) δηλαδή γνωρίζω n γραμμ. ανεξ. λύσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, τότε αναζητώ μερική λύση της (μη-ομογενούς) (*) στην μορφή:

$$\boxed{y_\mu(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) + \dots + c_n(x)\,y_n(x)}$$

Έστω, για απλότητα, $n=2$:

$$\boxed{L[y] = y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y}$$ με y_1, y_2 λύσεις ομογενούς γρ. ανεξάρτητες

Δηλ. $\begin{cases} L[y_1] = 0 \\ L[y_2] = 0 \end{cases}$

Έστω $y_\mu = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \overset{\text{παραγωγίζω}}{\underset{\text{κανόνας γιν.}}{\Leftrightarrow}}$

$$\Leftrightarrow (y_\mu)' = \underbrace{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2}_{=0} + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$$

Οι συναρτήσεις $C_1(x), C_2(x)$ είναι υπο προσδιορισμό. ΑΠΑΙΤΩ

$$\boxed{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0} \quad (1)$$

Τότε, $y_\mu' = C_1y_1' + C_2y_2'$

και $y_\mu'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$

$$L[y_\mu] = \underline{C_1'y_1' + C_2'y_2'} + \underline{C_1y_1''} + C_2y_2'' + \underline{p_1C_1y_1'} + p_1C_2y_2' + \underline{p_2C_1y_1} + p_2C_2y_2 = f(x)$$

$$L[y_\mu] = C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cancel{C_1L[y_1]} + \cancel{C_2L[y_2]} = f(x)$$

Δηλαδή, πρέπει $\boxed{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)}$ (2)

Άρα για να βρώ τα C_1, C_2 πρέπει να λύσω το σύστημα (1) & (2):

$$(6)\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Οι άγνωστοι στο (6) είναι οι $C_1'(x), C_2'(x)$. Και οι συντελεστές $y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το (6) έχει πάντα λύση γιατί η ορίζουσα είναι η Βρονσκιανή και είναι $\neq 0$ για όλα τα x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ βρείτε την γενική λύση

Εάν οι ρίζες του χπ είναι: $\rho \pm iq = \underbrace{e^{\rho x}\cos(qx)}_{y_1}$, $\underbrace{e^{\rho x}(\sin qx)}_{y_2}$

ΛΥΣΗ

Λύνω την ομογενή $y'' + y = 0$, χπ $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = \pm i}$

Άρα $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$, Αναζητώ μερική λύση της

$y_\mu = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$

$$\left.\begin{array}{l} (\cdot \sin x) \quad C_1'(x)\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ (\cdot\cos x) \quad -C_1'(x)\sin x + C_2'\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \boxed{C_2'(x) = 1}, \quad C_1'(x)\cos x + 1\cdot\sin x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$\int C_2'(x) = \int 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = x}$ (Επιλέγω σταθερά όπλους $c=0$)

$\int C_1'(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \boxed{C_1 = \ln|(\cos x)|}$

Συνεπώς, $\boxed{y_\mu = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x}$

Γενική: $y = y_{o\mu} + y_\mu = \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{y_{o\mu}} + \underbrace{\ln|\cos x|\cos x + x\sin x}_{y_\mu}$

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $(n \geq 2)$ Για να βρω μερική λύση της (*)

$y_\mu = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ και τα C_n ικανοποιούν:

$$\left.\begin{array}{l} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = 0 \end{array}\right\} (6)$$

(Δουλεύει μόνο για σταθ συντελεστές)

Μη ομογενείς Γραμμικές με Σταθ. Συντελεστές

(Μέθοδος Προσδιοριζόμενων συντελεστών), $a_i \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

$$\boxed{\text{Έστω } y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \underbrace{A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s}_{\text{πολυώνυμο βαθμού } s}}$$

Υποθέτω $a_n \neq 0$. Τότε αναζητώ μερική λύση στην ίδια μορφή δηλαδή,
$$\boxed{y_\mu = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ | $y^{(4)} + y' + y = x^2 + 3x$

ΛΥΣΗ

Αναζητώ $y_\mu = \underbrace{B_0 x^2 + B_1 x + B_2}_{\text{βάζω όλους τους όρους}}$ ← [Το $y^{(4)}$ θα μηδενίσει επειδή εδώ έχω μέχρι x^2

$2B_0 x + B_1 + B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = x^2 + 3x \Leftrightarrow$

$B_0 x^2 + (B_1 + 2B_0)x + (B_1 + B_2) = x^2 + 3x$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{B_0 = 1} \\ &B_1 + 2B_0 = 3 \Rightarrow \boxed{B_1 = 1} \\ &B_1 + B_2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_2 = -1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y_\mu = x^2 + x - 1}$$

Έστω τώρα πχ ότι $a_n = a_{n-1} = 0$ και $a_{n-2} \neq 0$ άρα έχουμε:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' = A_0 x^s + \dots + A_s$

Έστω $z = y'' \Rightarrow z^{(n-2)} + a_1 z^{(n-3)} + \dots + a_{n-2} z = A_0 x^s + \dots + A_s$

Άρα $z_\mu = B_0 x^s + \dots + B_s$ και βρίσκω τα B_i όπως πριν

Για να βρω την y ολοκληρώνω 2 φορές:

$$y = \frac{B_0}{(s+2)(s+1)} x^{s+2} + \dots + \frac{B_s}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

Επιλέγω $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y = x^2 (\tilde{B}_0 x^s + \dots + \tilde{B}_s)$

Τελικά, Αν $a_n = a_{n-1} = 0$ και $a_{n-2} \neq 0$. Αναζητώ λύσεις της μορφής: $y = x^2 (B_0 x^s + \dots + B_s)$

<u>Γενικά</u>, αν $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-k} = 0$, $a_{n-k+1} \neq 0$

$$\rightsquigarrow \boxed{y_\mu = x^{k-1} (B_0 x^s + \dots + B_s)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ | Βρείτε γενική λύση $y^{(4)} - y'' = x - 1$

Χ.Π $k^4 - k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k^2 - 1) = 0$

$k^2 = 0$ (διπλή)

$(k-1)(k+1) = $ $k = 1$, $k = -1$

$$y_{o\mu} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_3 e^{-x}$$

Αναζητώ $y_\mu = x^2 (B_0 x + B_1)$ (παραγωγίζω 2 φορές & αντικαθιστώ στο $-y''$)

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε: $-6B_0 x - 2B_1 = x - 1$

$B_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $B_0 = -\frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow y_\mu = x^2 \left(-\frac{1}{6} x - \frac{1}{2}\right)$$

Άρα $y_\gamma = y_{o\mu} + y_\mu$