ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 13/03/2023

$L[u]=f$ → Οπότε εάν u_0: $L[u_0]=0$ και u_μ: $L[u_\mu]=f$

γραμμική

τότε: $L[u_0+u_\mu]=L[u_0]+L[u_\mu]=f$, όπου $L[u_0]=0$, $L[u_\mu]=f$

▸ Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές

Μέθοδος Προσδιοριστέων Συντελεστών

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_n y$$

και $L[y]=A_0x^s+\dots+A_{s-1}x+A_s$, $A_0\neq0$

↳ **Α' περίπτωση** ↦ Αν $a_n\neq0$ τότε αναζητώ $y_\mu=B_0x^s+\dots+B_s$

$a_n=a_{n-1}=\dots=a_{n-m+1}=0$ τότε αναζητώ: $y_\mu=x^m(B_0x^s+\dots+B_s)$

↳ **Β' περίπτωση** ↦ $L[y]=e^{\lambda x}[A_0x^s+\dots+A_{s-1}+A_0]$, $A_0\neq0$

Έστω για $n=2$ (για ευκολία):

$$y''+a_1y'+a_2y=e^{\lambda x}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\dots+A_s) \quad (*)$$

Αναζητώ λύση στην μορφή: $y=e^{\lambda x}z(x)$ → Αντικαθιστώ στην (*) και βρίσκω:

$$z''+(2\lambda+a_1)z'+(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)z=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\dots+A_s$$

Οπότε έχω αναχθεί στην περίπτωση Α για την z. Άρα αναζητώ λύση $z=B_0x^s+\dots+B_s$, Αν λ όχι ρίζα χ.π

→ Αν λ απλή ρίζα του χ.π: $z=x(B_0x^s+\dots+B_s)$

↳ Αν λ διπλή ρίζα του χ.π: $z=x^2(B_0x^s+\dots+B_s)$

ΓΕΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ $\Rightarrow L[y] = e^{\lambda x}(A_0 x^s + \dots + A_s)$ για γενικό n

(το πλήρες, ακόμα και αν κάποια A_i είναι $=0$)

(I) Αν λ όχι ρίζα του χ.π: $y = e^{\lambda x}(B_0 x^s + \dots + B_s)$

(II) Αν λ ρίζα πολ/τητας m του χ.π τότε: $y = x^m e^{\lambda x}(B_0 x^s + \dots + x^s)$

Παραδειγμα

1) $y'' - y = x e^{\frac{x}{2}}$. Βρείτε μερική λύση

ΛΥΣΗ

$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$: χπ: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)(k+1) = 0$. Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ρίζα του χ.π. Άρα ανάγομαι στην περ 1. Αναζητώ λύση στην μορφή: $y = e^{\frac{1}{2}x}(B_0 x + B_1)$

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}(B_0 x + B_1) + e^{\frac{1}{2}x} \cdot B_0 \\ y'' &= \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}x}(B_0 x + B_1) + e^{\frac{1}{2}x} B_0 \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} \cancel{e^{\frac{1}{2}x}}(B_0 x + B_1) + \cancel{e^{\frac{1}{2}x}} B_0 = x \cancel{e^{\frac{1}{2}x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} B_0 x + B_0 - \frac{3}{4} B_1 = x \Rightarrow -\frac{3}{4} B_0 = 1 \Rightarrow B_0 = -\frac{4}{3}$$

$$\hookrightarrow B_0 - \frac{3}{4} B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{4}{3} B_0 = -\frac{16}{9}$$

Γ' ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\Rightarrow L[y] = e^{px}\left(P_s(x)\cos(qx) + Q_s(x)\sin(qx)\right)$

όπου:

$$\cos(qx) = \frac{e^{iqx}+e^{-iqx}}{2}, \quad \sin(qx) = \frac{e^{iqx}-e^{-iqx}}{2i} \qquad \left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$\Downarrow$ Αντικαθιστώ στην εξίσωση

και έχω $L[y] = e^{(p+iq)x} R_s(x) + e^{(p-iq)} \overline{R_s(x)}$ ← ο συζυγής

όπου $R_s(x) = \dfrac{P_s(x) - iQ_s(x)}{2}$

Γενικός κανόνας για την Γ' περ.: $L[y] = e^{px}\left(P_s(x)\cos(qx) + Q_s(x)\sin(qx)\right)$

(I) Εάν $p \pm iq$ ΔΕΝ είναι ρίζα του χ.π αναζητώ λύσεις στην μορφή:

$$y = e^{px}\left[\overline{P}_s\cos(qx) + \overline{Q}_s\sin(qx)\right]$$ (όπου $\overline{P}_s$ ένα άλλο διαφ. αντίστοιχο P_s)

(II) Ομοίως εάν $p \pm iq$ ρίζα του χ.π πολ/τητας m:

$$y = x^m e^{px}\left[\overline{P}_s\cos(qx) + \overline{Q}_s\sin(qx)\right]$$

(**) Τα $\overline{P}_s, \overline{Q}_s, P_s, Q_s$ είναι όλα πολυώνυμα βαθμού s.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $y^{(4)} - y = 3x + \cos x$. Βρείτε την γενική λύση

ΛΥΣΗ

$$y_\gamma = y_{o\mu} + y_\mu$$

Για την $y_{o\mu}$ λύνω το χ.π: $k^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)(k+1)(k+i)(k-i) = 0$

Ρίζες: ± 1, $\pm i$ (4 απλές)

$\pm 1 \to e^{\pm x}$, $\pm i \to e^{\pm ix}$

$$y_{o\mu} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \sin x$$

Θα αναζητήσω την y_μ στην μορφή: $\boxed{y_\mu = y_{\mu 1} + y_{\mu 2}}$

Όπου η $y_{\mu 1}$ λύνει την: <u>και</u> Η $y_{\mu 2}$ λύνει την:

(1) $y^{(4)} - y = 3x$

(2) $y^{(4)} - y = \cos x$

↳ Για την (1): Αναζητώ $y_{\mu 1}$ στην μορφή: $y_{\mu 1} = B_0 x + B_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow -B_0 x - B_1 = 3x \quad \left.\begin{array}{l} \to B_0 = -3 \\ \to B_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_{\mu 1} = -3x}$$

↳ Για την (2): $\rho \pm i q = 0 \pm 1 i = \pm i$

Άρα $\rho \pm i q$ ρίζα πολλαπλότητας $\boxed{m=1}$

Αναζητώ λύση της (2) στην μορφή: $y = x[B\cos x + \underbrace{\Gamma \sin x}]$

Το βάζω ακόμα και αν στο 2ο μέλος της (2) δεν υπάρχει $\sin x$

Μετά από πράξεις βρίσκω ότι:

$$y^{(4)} - y = 4B\sin x - 4\Gamma \cos x = \cos x \quad \begin{array}{l} \to B = 0 \\ \to \Gamma = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$y_{\mu 2} = -\frac{1}{4} x \sin x$$

Οπότε: $y_{\gamma \varepsilon \nu} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 3x - \frac{1}{4} x \sin x$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τρίτη 14/03/2023

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση: $x^2y''+xy'+4y=2\ln^3 x-1$, $x>0$

(Euler μη-ομογενής)

↳ θα συνδυάσω 2 τεχνικές.

[Για την ομογενή Euler επιλ. $x=e^t$] & [Προσδιοριστέων συντελεστών για την εξ. $z(t)=y(x)$].

ΛΥΣΗ

Έστω $x=e^t$, $y(x)=z(t)$. Μελετώ κατ' αρχήν την ομογενή

$$y'=z'\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}z'$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}z'+z''\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(z''-z')$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται: $(z''-z')+z'+4z=2t^3-1$

Άρα καταλήγω: $z''+4z=2t^3-1$ (1)

Ομογενής: $z''+4z=0$

χ.ε.: $k^2+4=0 \Rightarrow k=\pm 2i$

Οπότε $z_{o\mu}=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)$ (2)

Αναζητώ μερική λύση στην μορφή: $y=B_0t^3+B_1t^2+B_2t+B_3$

Αντικαθιστώ την (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $(6B_0t+2B_1)+4(B_0t^3+B_1t^2+B_2t+B_3)=2t^3-1$

$\Rightarrow 4B_0t^3+4B_1t^2+(4B_2t+6B_0)t+2B_1+4B_3=2t^3-1$

- $4B_0=2 \Rightarrow \boxed{B_0=\frac{1}{2}}$
- $4B_1=0 \Rightarrow \boxed{B_1=0}$
- $4B_2+6B_0=0 \Rightarrow B_2=-\frac{3}{2}B_0 \Rightarrow \boxed{B_2=-\frac{3}{4}}$
- $\cancel{2B_1}^{0}+4B_3=-1 \Rightarrow \boxed{B_3=-\frac{1}{4}}$

Άρα $Z_\mu(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$

Συνεπώς, γενική λύση της (1): $Z_\gamma = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$

$y_\gamma(x) = C_1\cos(2\ln x) + C_2'\sin(2\ln x) + \frac{1}{2}\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln x - \frac{1}{4}$

Μέθοδος Δυναμοσειρών ↤ [Εκτός Ύλης]

Ορισμός ↦ Η $u(x)$ είναι αναλυτική σε μια γειτονία $\hat{I}$ της x_0 αν $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$

όπου βέβαια η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει στην γειτονία του x_0

π.χ./ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\left(x_0 = 0, a_k = \frac{1}{k!}, I \in \mathbb{R}\right)$

Θεώρημα ↦ Αν οι συντελεστές της εξίσωσης και το 2° μέλος είναι αναλυτικές συναρτήσεις γύρω από το x_0, τότε και η λύση είναι αναλυτική σε μια γειτονία του x_0.

Απλό Παράδειγμα: $y' = y$

↳ Η λύση είναι $\overset{a_0}{c}e^x$.

Από το Θ. έχω αναλυτική λύση, έστω γύρω από το $x_0 = 0$

Άρα η λύση μου είναι της μορφής: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$

. $y' = a_1 + 2a_2 + 3a_3 x^2 + \dots + k a_k x^{k-1}$

Άρα, $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{\overbrace{k-1}^{=n}}$ $\Rightarrow n = k+1$ $\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = y'$

Άρα η $y'=y$ είναι: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ (*)

Από την (*) έχω ότι $a_k = (k+1) a_{k+1}$ με $k=0,1,2,\dots$

→ Για $k=0$: $\boxed{a_1 = a_0}$

↳ Για $k=1$: $2a_2 = a_1 = a_0 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2} a_0}$

↳ Για $k=2$: $3a_3 = a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2\cdot 3} a_0 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{6} a_0}$

$\vdots$

↳ Για $k=n$: $a_n = \frac{1}{n!} a_0$

Άρα $\boxed{y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = a_0 e^x$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (2×2) ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

▸ Αλλαγή Συμβολισμού: $x(t), y(t)$

$x' = ax + by + f(t)$ (1) $\quad , a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$y' = cx + dy + g(t) \Rightarrow cx = y' - dy - g(t)$ (2)

(Μεθοδολογία)

Παραγωγίζω την 2η Εξίσωση: $y'' = cx' + dy' + g'(t) \overset{(1)}{=}$

$= c(ax + by + f(t)) + dy' + g'(t) \overset{(2)}{=} a(y' - dy - g(t)) + cby + cf(t) + dy' + g'(t)$

$\Leftrightarrow y'' - (a+d)y' + (ad - bc)y = cf(t) + g'(t) + ag(t)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 ↦ $x' = y$

$y' = x \Rightarrow y'' = x' = y \Rightarrow \boxed{y'' - y = 0}$

χπ: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)(k+1) = 0 \Rightarrow \boxed{k = \pm 1}$

Άρα $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

$x(t) = y'(t) \Rightarrow x(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$

2) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$x' = -2x + y \; (1) \quad , x(0) = 2$

$y' = x - 2y \; (2) \quad\quad y(0) = 3$

ΛΥΣΗ

$y'' = x' - (2y)' = \overbrace{-2x+y}^{x'} - 2y' \Big\} = -2(y'+2y) + y - 2y' = -4y' - 3y$

Απο (2): $y' = x - 2y \Rightarrow x = y' + 2y$

Άρα τελικά, $y'' + 4y' + 3y = 0$

$X\Pi = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 3 = 0 \quad\quad \Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$k_{\cdot} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \boxed{k_1 = -1, \; k_2 = -3}$

Άρα $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$

$x(t) = y'(t) + 2y(t) \Rightarrow x(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t} + 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-3t} =$

$= c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t}$

Ικανοποιώ τις αρχ. συνθήκες:

$y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow 3 = c_1 + c_2$

$x(0) = c_1 - c_2 \Rightarrow 2 = c_1 - c_2$

$\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{5}{2}} \; , \; \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$

Άρα η λύση μου είναι:

$x(t) = \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$

$y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$