ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 03/04/2023

▸ Σειρές Fourier

↳ Το σύνολο συναρτήσεων $\{\varphi_n\}$, $n=1,2,\dots$, στο διάστημα (a,b) λέγεται **ορθοκανονικό** αν:

(δεν έχω πετεροσλένη διάσταση)

$$\langle \varphi_m,\varphi_n\rangle = \underbrace{\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx}_{\text{εσωτ. γινόμενο}} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m=n \\ 0, & \text{αν } m\neq n \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις είναι τέτοιες ώστε $\int_a^b \varphi_m^2 < +\infty$

Δηλαδή είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. $=L^2(a,b)$

Σκεφτόμαστε τις φ_n σαν βάση του χώρου των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

↳ Αν έχω $f\in L^2(a,b)$ τότε μπορώ να γράψω: $f=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$

όπου το $c_n=\langle f,\varphi_n\rangle = \int_a^b f\varphi_n dx$

↳ Αν δεν έχω $\int \varphi_n^2=1$ τότε έχω ένα ορθογώνιο σύστημα $\{\phi_n\}$ (Το $\int \varphi_n\varphi_m=0$, $m\neq n$ συνεχίζει να ισχύει) και φυσικά μπορώ να αναπτύξω την f ως προς R $\{\phi_n\}$ δηλαδή:

$\bar{c}_n=\langle f,\phi_n\rangle$ και $f=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_n\phi_n$.

▸ Έστω το σύστημα $\{\phi_k\}$ στο διάστημα $(-\ell,\ell)$: $1, \cos\frac{k\pi x}{\ell}, \sin\frac{k\pi x}{\ell}$, $k=1,2,\dots$

Το σύστημα αυτών των συναρτήσεων είναι ορθογώνιο στο $(-\ell,\ell)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ → Θα πρέπει το ολοκλήρωμα του γινομένου 2 οποιονδήποτε διαφ. συναρτήσεων να είναι $=0$.

π.χ. στην περίπτωσή μας: $\underbrace{\int_{-\ell}^{\ell} 1\cdot \cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx}_{\left[\frac{\ell}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right]_{-\ell}^{\ell}=0} \stackrel{?}{=} 0 \quad (k=1,2,\dots)$

Πρέπει επίσης να ελέγξω: • $\int_{-\ell}^{\ell} 1 \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$

• $\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \stackrel{?}{=} 0$ για $k\neq n$

• $\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \stackrel{?}{=} 0$

Τέλος, • $\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$, $k,n=1,2,\dots$ (μπορεί $k=n$)

↳ Έστω $I_1=\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$

Χρειάζομαι την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\left.\boxed{\begin{aligned}&(I):\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ &(II):\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{aligned}}\right\}\stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$ προσθέτω κατά μέλη

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

Άρα. $\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\cos\frac{(k+n)\pi x}{\ell}+\cos\frac{(k-n)\pi x}{\ell}\right)dx=0+0=0$

↳ Για την $\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}=0$

Χρησιμοποιώ $\boxed{\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a}$ με την ίδια λογική με πριν.

$I=\cos^2\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\cos\left(\frac{2k\pi x}{\ell}\right)+1\right)dx=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\ell=\ell$

Ομοίως $\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{k\pi x}{\ell}=\ell$ και $\int_{-\ell}^{\ell}1\,dx=\ell$

Άρα αν θέλω να κανονικοποιήσω το $\{\phi_k\}$ έχω το

$\{\psi_k\}$: $\frac{1}{\sqrt{2\ell}}$, $\frac{1}{\sqrt{\ell}}$, $\frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{nx}{\ell}$

Αν f τετρ. ολοκλ/μη $(-\ell,\ell)$. Τότε:

- $a_k = \frac{1}{\ell}\langle f, \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\rangle = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$, $k=1,2,\dots$
- $b_k = \frac{1}{\ell}\langle f, \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\rangle = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$
- $a_0 = \frac{1}{\ell}\langle f, 1\rangle = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$ $(k=0)$

Άρα $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\frac{\sin k\pi x}{\ell}\right)$

Τελικά, Έστω f συνάρτηση στο $(-\ell,\ell)$. Ορίζω,

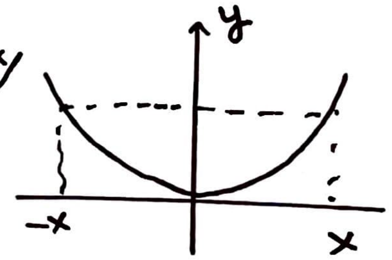
$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx, \quad k=0,1,2,\dots$$

Τότε, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)$

Παρατήρηση:

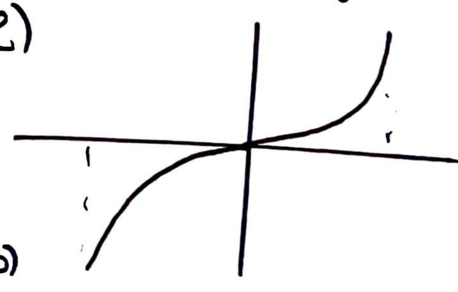
↳ Έστω f άρτια, δηλαδή $f(x)=f(-x)$, $x\in(-\ell,\ell)$:



συμμετρική ως προς τον y.

↳ Έστω g, περιττή, δηλαδή $-f(x)=f(-x)$, $x\in(-\ell,\ell)$

συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O,(0,0)



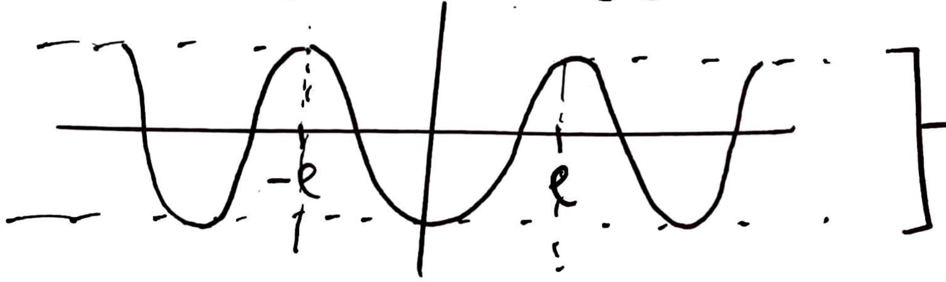
ΑΣΚΗΣΗ: Αν g περιττή στο $(-\ell,\ell) \Rightarrow \int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\Rightarrow$ $I = \int_{-\ell}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\ell} g(x)dx$

Αλλαγή μεταβλητών: $y=-x$

Άρα $I = -\int_{\ell}^{0} g(-y)dy + \int_{0}^{\ell} g(x)dx = \int_{0}^{\ell} g(-y)dy + \int_{0}^{\ell} g(x)dx$

$\overset{g \text{ περιττή}}{=} \int_{0}^{\ell} (-g(y))dy + \int_{0}^{\ell} g(x)dx = 0$



Με περιοδική επέκταση η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν f φραγμένη περιοδική (περίοδος $=2\ell$) και έχει μόνο ασυνέχεια πρώτου είδους (υπάρχουν αριστερά/δεξιά όρια αλλά δεν είναι ίσα) τότε η σειρά Fourier (F) συγκλίνει στην f σε κάθε σημείο που είναι συνεχής. Αν η f ασυνεχής στο x_0, η σειρά συγκλίνει στο $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

δηλαδή στο ημιάθροισμα αριστερού & δεξιού ορίου.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τρίτη 04/04/2023

Παρατήρηση στην άσκηση 3 της προόδου:

(*) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x$, $x>0$ $\overset{:x^2}{\Leftrightarrow}$ $\frac{y''\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{2xy'}{x^2} + \frac{2y}{x^2} = \frac{x\ln x}{x^2}$ $\Leftrightarrow$ $\Updownarrow$

$x = e^t$, $y(x) = z(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{z'' - 3z' + 2z = te^t}$ (1) $\boxed{y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = \frac{\ln x}{x}}$

$z_{o\mu}(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ $\Rightarrow$ (στις αρχ. μεταβ) $\Rightarrow$ $y_{o\mu}(x) = c_1x + c_2x^2$

Δηλαδή $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$

Στην συνέχεια πρέπει να βρω την μ. λύση

Μπορώ να κάνω στην (1) μεταβολ. σταθ. ή προσδ. συντελεστών

Μπορώ στην (*) να κάνω μέθοδο μετ. σταθερών

Άρα $y_\mu = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

Όμως:

$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$

$c_1'(x) + c_2'(x)y_2 = \cancel{x\ln x}\ \frac{\ln x}{x}$

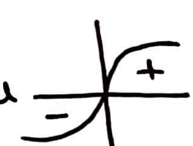
$\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$ Για να εφαρμοστεί η μέθοδος μεταβολ. σταθερών θα πρέπει η εξίσωση να είναι σε καν. μορφή. (δηλ ο συντελεστής του $y'' = 1$)

Οπότε το δεξί μέλος θα πρέπει να είναι $\frac{\ln x}{x}$ και όχι $x\ln x$.

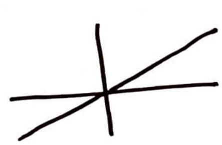
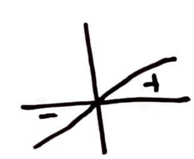
Σειρές Fourier (συνέχεια)

Έστω f στο $(-\ell, \ell)$. Τότε εάν $a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx$, $b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$

Τότε $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: → Αν f άρτια  τότε $f\sin\frac{k\pi x}{\ell}$ περιττή 

Άρα $b_k = 0$

↳ Αν f περιττή , τότε $f\cos\frac{k\pi x}{\ell}$ περιττή 

Άρα $a_k = 0$

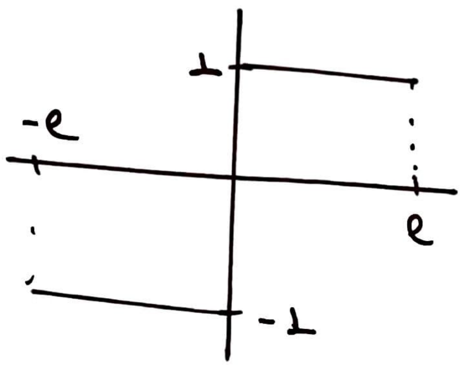
Δηλαδή, αν f άρτια αναπτύσσεται σε σειρά συνημιτόνων.

και αν f περιττή ⟶ ———— ημιτόνων.

Παραδειγματα

περιττη · περιττη = άρτια

1) Έστω $\phi(x)=1$, $x\in(0,\ell)$. Αναπτύξτε σε σειρά ημιτόνων



ΛΥΣΗ

Θεωρώ την περιττή επέκταση της ϕ στο $(-\ell,\ell)$

Δηλαδή $\bar{\phi}(x)=\begin{cases}1 & ,0<x<\ell\\ -1 & ,-\ell<x<0\end{cases}$

Αναπτύσσω την $\bar{\phi}$. Επειδή είναι περριττή $a_k=0$

και $b_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\bar{\phi}(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=$

$$=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0}\bar{\phi}(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx+\frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell}\bar{\phi}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx+\frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

μπορώ να το γράψω έτσι

$$=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\left[\frac{2}{\ell}\frac{\ell}{k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right]_0^{\ell}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left(-\cos(k\pi)+1\right)=\frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

Άρα για $x\in(-\ell,\ell)$ συνεπώς και για $x\in(0,\ell)$: $\Rightarrow$ $1=\sum_{n=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}=$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{\ell}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\ell}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{\ell}+\dots\right)$$

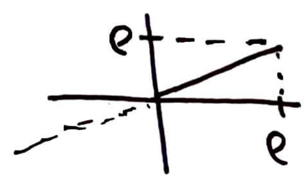
(Εαν βάλω x παίρνω σειρές αριθμών)

Για $x=\frac{\ell}{2}$: $1=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{\pi 5}{2}\right)=$

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\dots\right)\ \text{κοκ}$$

⇝ Εαν μας έλεγε αναπτυξη σε σειρά συνημιτόνων θα χρησιμοποιούσα την άρτια.

2) a) $\phi(x)=x$, $x\in(0,\ell)$ σε σειρα ημιτόνων



ΛΥΣΗ

Κάνω περιττή επέκταση και $a_k=0$,

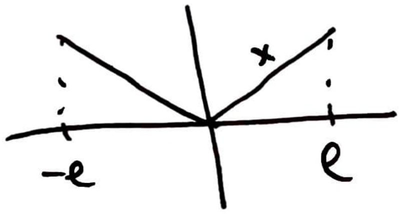
$b_k=\frac{2}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}x\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx\Rightarrow$ (ολοκληρώνω κατα μέλη) $\Rightarrow$

...

$$= (-1)^{k+1}\frac{2\ell}{k\pi}$$

Άρα $x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2\ell}{k\pi} \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \ x\in(0,\ell)$

β) Ομοίως σε συνημιτόνων



Κάνω Άρτια επέκταση

Άρα $b_k = 0$ και

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} x\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = (\text{ολοκλήρωση κατά μέλη}) = -\frac{2\ell}{k^2\pi^2}\left(1+(-1)^{k+1}\right)$$

$k = 1, 2, \dots$

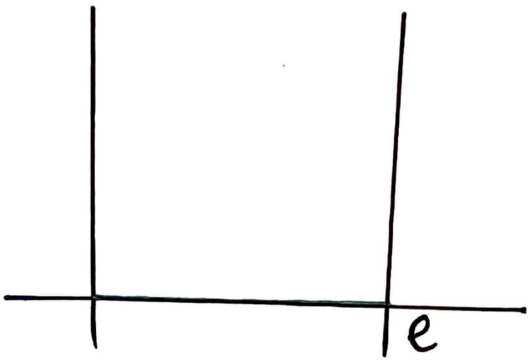
$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\ell}}\frac{1}{\cancel{2}}\ell^{\cancel{2}} = \ell$$

Άρα $x = \frac{\ell}{2} - \frac{2\ell}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{k+1}}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{\ell}, \ x\in(0,\ell)$

▸ Πρόβλημα Cauchy-Dirichlet ομογενούς κυματικής εξ.

$u_{tt} - u_{xx} = 0, \ 0<x<\ell, \ t>0.$

$u(x,0) = \phi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0<x<\ell.$



- $u(0,t)=0, \ u(\ell,t)=0$ ⇝ Συνθήκες (ομογενή) Dirichlet
- $\phi(0) = \phi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$ ⇝ Συνθήκες Συμβατότητας

↑ μερικές φορές εννοούνται όταν δεν δίνονται

⇝ Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών:

Αναζητώ λύση στην μορφή: $u = X(x)T(t), \ X(x)\not\equiv 0, \ T(t)\not\equiv 0$

Η εξίσωση γίνεται: $X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0$

Διαιρώ με $X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$ " σταθερα ανεξ του x, t

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} T'' + \lambda T = 0 \quad (2) \\ X'' + \lambda X = 0 \quad (1) \end{aligned}\right\}$$

Ας δούμε την (1): $X''_{(x)} + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \ell$

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \\ u(\ell,t) = 0 \Rightarrow X(\ell)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{X(0) = X(\ell) = 0}$$

Αρα έχω το εξής πρόβλημα: συνοριακών τιμών (Π.Σ-Τ)

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$X(0) = X(\ell) = 0$

Διακρίνω περιπτώσεις:

Περ 1 | Έστω $\lambda < 0$. απο Χ.Π και Π: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-x}\cdot x}$

$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$X(\ell) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0$

Ψαχνω την ορίζουσα εαν είναι ίση με 0 ή οχι. $\quad 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{+\sqrt{-\lambda}\cdot\ell} & e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\ell} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\ell} - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\ell} \neq 0$

Το λ δεν μπορει να είναι 0 απο οποθ έχω $\lambda < 0$.

Αρα για $\lambda < 0$ <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει λύση πλην της $X(x) \equiv 0$

- Περ 2 | $\lambda = 0$ $\quad X(x) = c_1 x + c_2 \quad$: $X(0) = c_2 = 0$

$X(\ell) = c_1\ell + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Αρα και για $\lambda = 0$ <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει μη τετριμμένη λύση.

Περ 3 | $\lambda > 0$: Τοτε $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$X(\ell) = 0 \Rightarrow X(\ell) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$. Θέλω $c_2 \neq 0$

Άρα $\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\ell = k\pi$, $k=1,2,\ldots$

$\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, $k=1,2,\ldots$

↑ Ιδιοτιμές

$\boxed{X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)x}$ Άρα οι X_k είναι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.