



Τρίτη 3 Οκτωβρίου 2023

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός I

Φυλλάδιο 1

1). Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι παρακάτω ανισότητες είναι αληθείς

$$(a) \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0, \quad (b) |x+1| < |x+2|, \quad (c) |x+1| \geq x+2.$$

2). (α) Δείξτε ότι αν $y \in [-1, 1]$, τότε $y = \cos(\arccos y)$.

(β) Δείξτε ότι αν $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - k\pi, & k \text{ άρτιος} \\ (k+1)\pi - x, & k \text{ περιττός.} \end{cases}$$

3). Θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{n^{30}}{2^n}, \quad y_n = \frac{8^n}{n!} \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n).$$

Δείξτε ότι από ένα δείκτη και μετά, γίνονται μονότονες (δηλ. αύξουσες ή φθίνουσες). Βρείτε (για κάθε ακολουθία) τον δείκτη αυτό.

Υποδ. Μελετήστε το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων.

4). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας τυχαίο $\varepsilon > 0$ βρείτε κατάλληλο n_0 συναρτήσει του ε για τις παρακάτω συγκλίνουσες ακολουθίες.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \frac{2n+3}{3n+5} \rightarrow \frac{2}{3}, \quad \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Παράδοση: Τρίτη 10 Οκτωβρίου ή Πέμπτη 12 Οκτωβρίου την ώρα των Εργαστηρίων.