



Τρίτη 10 Οκτωβρίου 2023

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός I

Φυλλάδιο 2

1). Υπολογίστε τα όρια εφόσον υπάρχουν

$$(n^2 + n + 1)^{1/2} - (n^2 + 1)^{1/2}, \quad \left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right)^5, \quad \frac{5^n + (-2)^n}{7^n + 5^n}, \quad \sqrt[n]{n^3 + 5n^2 - 6}.$$

2). Δείξτε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν από κάποιο δείκτη  $n_0$  και μετά. Βρείτε ένα τέτοιο  $n_0$  (όχι απαραίτητα το πιο μικρό).

$$\frac{3}{2} < \frac{7n^3 - n + 5}{4n^3 + n^2 + 35} < 2, \quad \frac{n^3 - 100n}{n^2 + 100n + 32} > 17.$$

3). Έστω  $0 \leq a \leq b \leq c$ . Δείξτε ότι

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow b, \quad \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \rightarrow c.$$

**Υποδ.** Χρησιμοποιήστε κατάλληλα το κριτήριο παρεμβολής.

4). Έστω  $0 < a_1 < b_1$  και ορίζουμε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Δείξτε ότι  $0 < a_n \leq b_n$  για κάθε  $n$ . Δείξτε ότι οι ακολουθίες  $(a_n)$  και  $(b_n)$  είναι μονότονες. Δείξτε ότι συγκλίνουν. Δείξτε ότι έχουν το ίδιο όριο (δεν απαιτείται να το βρείτε).

Παράδοση: Τρίτη 17 Οκτωβρίου ή Πέμπτη 19 Οκτωβρίου την ώρα των Εργαστηρίων.