



Τρίτη 7 Νοεμβρίου 2023

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι

Φυλλάδιο 6

1) Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$, έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

2) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln(x^4 + 12)}{|x| + 6}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Δειξτε ότι υπάρχει $K > 0$ τ.ω. όταν $|x| > K$ τότε $|f(x)| < f(0)$. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο \mathbf{R} . Λαμβάνει μέγιστη τιμή; Λαμβάνει ελάχιστη τιμή;

Υποδ. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα το γεγονός ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

3). Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . Τέλος δείξτε ότι

$$f^{-1}(x) - \frac{1}{f^{-1}(x)} = 2x, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

4). Για ποιες τιμές του $a \in \mathbf{R}$ είναι συνεχείς οι συναρτήσεις:

$$(i) f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad (ii) g(x) = \begin{cases} x^a \sin x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Για ποιες τιμές του $a \in \mathbf{R}$ είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x = 0$;

Παράδοση: Τρίτη 14 Νοεμβρίου ή Πέμπτη 16 Νοεμβρίου την ώρα των Εργαστηρίων.