



Τρίτη 14 Νοεμβρίου 2023

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι

Φυλλάδιο 7

1) Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \right) = 0, \quad x > 0 .$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0 .$$

2) Αν $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ δείξτε ότι

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x, y > 0.$$

Υποδ. Για $y > 0$, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q} - xy$, $x \in (0, \infty)$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή της f ;

3) Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$y(x) = a \ln x + 2a - x, \quad x \in (0, \infty),$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

4). Δείξτε τις παρακάτω ανισότητες

(i) $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1) \ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$

(ii) $\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4}$, $x \in (0, \pi)$.

Υποδ. Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα Taylor των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Παράδοση: Τρίτη 21 Νοεμβρίου ή Πέμπτη 23 Νοεμβρίου την ώρα των Εργαστηρίων.