ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 28 Νοεμβρίου 2023

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός Ι

Φυλλάδιο 9

1) Δίδεται το άθροισμα

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{2}{n+n},$$

Βρείτε συνάρτηση $f(x)$ με $x \in [0,1]$ τ.ω. το άθροισμα S_n να είναι ένα άθροισμα Riemann του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Υποδ. Θεωρήστε μία διαμέριση του $[0,1]$ με $0 = x_0$, $x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_k = \frac{k}{n}, \ldots, x_n = 1$. Στη συνέχεια παρατηρήστε οτι $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\,\frac{1}{n}$.

2) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} e^{-t}\,dx, \qquad \lim_{x\to 0^+} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t\,dt}{1+t^2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t\,dt}{1+t^2}\ .$$

Υποδ. Για το 3ο βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $\frac{t}{1+t^2}$ στο διάστημα $[1-x, 1+x]$. Στη συνέχεια δείξτε οτι το όριο είναι ίσο με 1.

3) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int e^{\sqrt{x}}dx, \qquad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx, \qquad \int_1^3 x\ln x dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan\sqrt{x}dx$$

4). Δίδεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(ι) Δείξτε οτι αν η f είναι περιττή δηλ. $f(x) = -f(-x)$ τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad \forall a \in \mathbf{R}_+\ . \tag{1}$$

(ιι) Ισχύει το αντίστροφο; Δηλ αν ισχύει η (1), είναι η f περιττή;

Παράδοση: Τρίτη 5 Δεκεμβρίου ή Πέμπτη 7 Δεκεμβρίου την ώρα των Εργαστηρίων.