



15 Ιανουαρίου 2024

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός I

Τελικό διαγώνισμα

1) Υπολογίστε τα όρια ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

$$(i) \lim a_n, \quad a_n = \left(\frac{(-1)^n}{2} + \frac{\cos n}{n} \right)^n, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right], \quad a > 0, b > 0.$$

2) Αποδείξτε την ανισότητα

$$\ln \left(1 + \frac{1}{3x} \right) > \frac{1}{3x + 1}, \quad \forall x > 0.$$

3) Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x \, dx}{1 + x^3}.$$

4) Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του $a \in \mathbf{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη; Για ποιές τιμές του a η παράγωγος της f είναι συνεχής συνάρτηση;

5) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν,

$$(i) \int_0^1 \arctan x \, dx, \quad (ii) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx.$$

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Διάρκεια εξέτασης 1.45'.