# 1 Θέμα

(i) Έχω ότι $a_{2k} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2k} \longrightarrow +\infty$

διότι $7/6 > 1$. Επίσης

$$a_{2k-1} = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} \longrightarrow 0, \text{ διότι } \frac{1}{6} < 1$$

Συνεπώς το όριο της $a_n$ δεν υπάρχει αφού βρήκα δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια

(ii)

$$1 < 1^2+2^2+\dots+n^2 < \underbrace{n^2+\dots+n^2}_{n \text{ φορές}}$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt[n]{1^2+2^2+\dots+n^2} < \sqrt[n]{n^3} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3$$

όταν πάρω $n \to \infty$ $\quad 1 < b_n < \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1$

(επειδή $\sqrt[n]{n} \to 1$). Συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής $b_n \longrightarrow 1$.

## 2ο Θέμα

Ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -1^+} y(x) = +\infty$$

Άρα η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Ελέγχω για πλάγιες ασύμπτωτες :

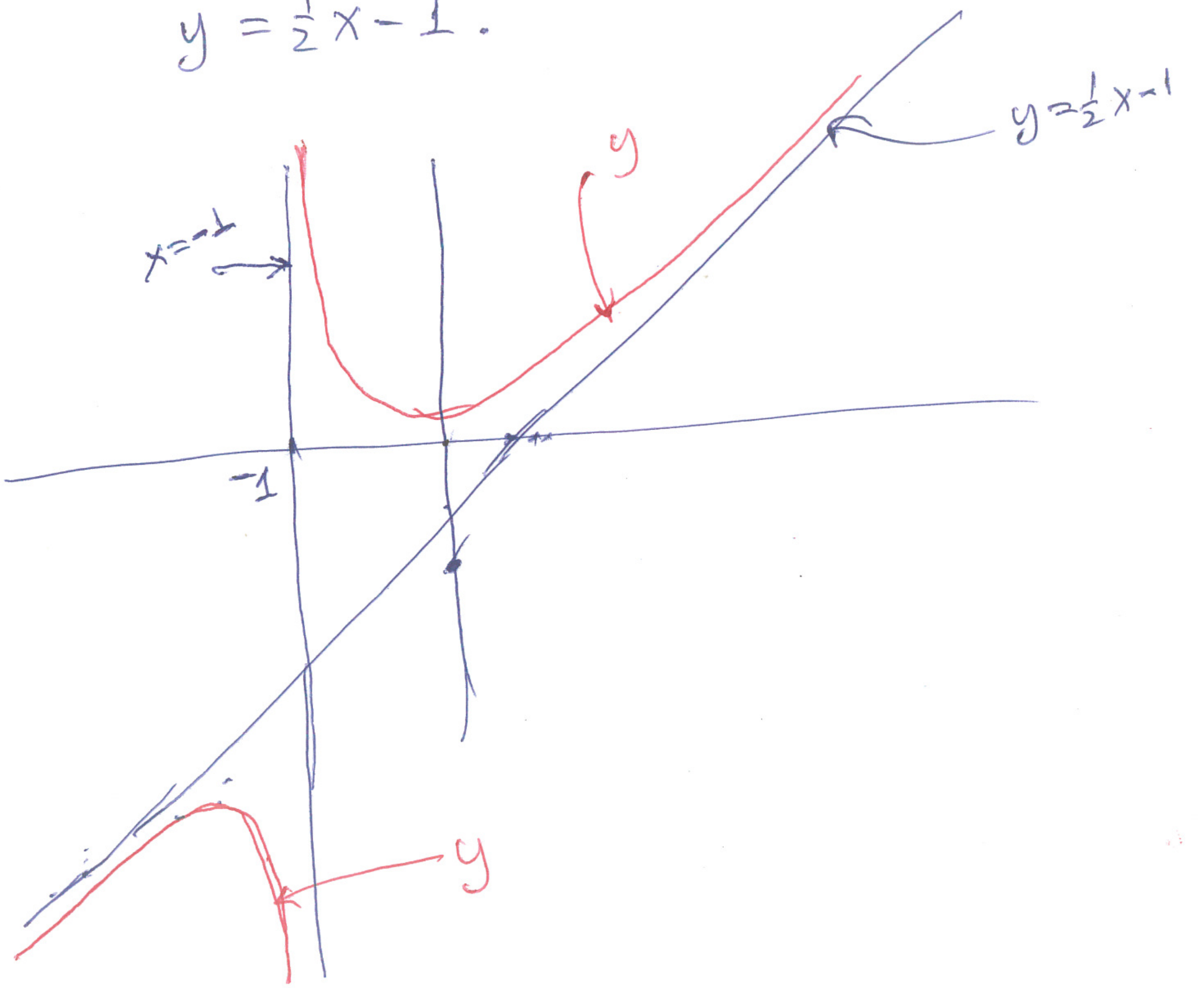
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+4}{2x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{2\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

και $$\lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{2(x+1)}-\frac{x(x+1)}{2(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}-x}{2(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{2x+1}=-1$$

το ίδιο και για $x\to-\infty$. Άρα, πλάγια ασύμπτωτη

$$y=\frac{1}{2}x-1.$$



# Θέμα 3

(i) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \sin\dfrac{1}{x} = \sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

Καθώς $x \to 0^+$ έχω ότι $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$, $\sqrt{x} \to 0$

συνεπώς $\sqrt{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \to 0$. Επίσης

$-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$. Άρα

$$\sqrt{x}\,\frac{\sin x}{x}\,\sin\frac{1}{x} \longrightarrow 0.$$

(ii) Για $x$ κοντά στο $-\infty$, $-1 < \dfrac{1}{x} < 0$

άρα $\left[\dfrac{1}{x}\right] = -1$. Συνεπώς

$$\lim_{x \to -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x \to -\infty} x(-1) = \underline{+\infty}.$$

# Θέμα 4

<u>Θα δείξω ότι $1 \leq a_n \leq 2$</u> $\forall n \geq 1$ με επαγωγή.

Για $n=1$ ισχύει $(a_1 = 3/2)$. Έστω ότι ισχύει

για $n=k$ δηλ. $1 \leq a_k \leq 2$

Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$.
Δηλ. θα δείξω

$$1 \le a_{k+1} \le 2 \iff 1 \le \sqrt{3a_k-2} \le 2$$

$$\iff 1 \le 3a_k-2 \le 4$$

$$\iff 3 \le 3a_k \le 6 \iff 1 \le a_k \le 2$$

που ισχύει από επαγωγική υπόθεση.

Θα δείξω ότι η $a_n$ είναι αύξουσα. Δηλ.

$$a_{n+1} \ge a_n \iff \sqrt{3a_n-2} \ge a_n \iff$$

$$\iff 3a_n-2 \ge a_n^2 \iff a_n^2-3a_n+2 \le 0$$

$$\iff (a_n-1)(a_n-2) \le 0$$ που αληθεύει

αφού $1 \le a_n \le 2$.

Επειδή η $a_n$ αύξουσα και άνω φραγμένη (από το 2) θα συγκλίνει, έστω στο $\ell \le 2$.
Άρα και $a_{n-1} \to \ell$, οπότε έχω ότι

$$\ell = \sqrt{3\ell-2} \iff (\ell-1)(\ell-2)=0$$

$\Rightarrow \ell=1$, ή $\ell=2$. Όμως επειδή η $a_n$ αύξουσα (άρα $a_n \ge 3/2 = a_1$) $\boxed{\ell=2}$.