Σύνολα και Αριθμοί

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ φυσικοί αριθμοί
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ακέραιοι
- $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \}$ ρητοί
- Άρρητοι, π.χ. $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ κλπ.
- $\mathbb{R}$ πραγματικοί αριθμοί

→ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

<0 0 >0

Ανισότητες και απλές ιδιότητες

→ $x \leq y$ τότε $x+z \leq y+z$

→ Αν $z>0$ τότε $x \cdot z \leq yz$

→ Αν $z<0$ τότε $xz \geq yz$

→ Απόλυτη τιμή του x:
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

!! Πάντα $|x| \geq 0$
και $|x| = 0$ ανν $x = 0$.

→ $|xy| = |x||y|$

→ $|x| = |-x|$ κλπ

→ Τριγωνική ανισότητα

ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ

$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

$|x+y| \leq |x|+|y| \Leftrightarrow |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Leftrightarrow$

Η αριστερή ανισότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο!

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2xy \leq \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2|x||y| \Leftrightarrow$

$xy \leq |xy|$ σωστό!

→ Αν $a \geq b \geq 0$ τότε $a^2 \geq b^2$

→ $|x|^2 = x^2$

→ Έστω $a>0$, $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ τότε $x<-a$

Διαστήματα

- $x \in (a,b)$ με $a,b \in \mathbb{R}$ $a<x<b$
- $x \in [a,b) \Leftrightarrow a \leq x < b$
- $x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x<a$
- $x \in (a,+\infty) \Leftrightarrow x>a$

$A \subset \mathbb{R}$ σύνολο αριθμών και έχω ότι $\forall x \in A: x \leq u \in \mathbb{R}$ το u είναι άνω φράγμα για το A.

Αντίστοιχα λέμε ότι το ℓ είναι κάτω φράγμα όταν:

$$x \geq \ell \in \mathbb{R}.$$

Αρχιμήδεια Ιδιότητα

Γράφω 2 ισοδύναμες διατυπώσεις.

1) Για κάθε πραγματικό αριθμό $a>0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\frac{1}{n} < a$$

2) Για κάθε πραγματικό αριθμό $b>0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$n > b.$$

Ακέραιο Μέρος

$[x]$ = μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$

Πάντα: $[x] \leq x < [x]+1$

γνήσια ανισότητα

π.χ. $[2,5] = 2$ $\quad [-3,5] = -4$

$[0,7] = 0$

$[5/4] = 1$

!! (Προσέχω στους αρνητικούς αριθμούς)

Δυνάμεις / Ρίζες

Έχουμε $a>0$, $a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot \dots \cdot a}_{m \text{ φορές}}$

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

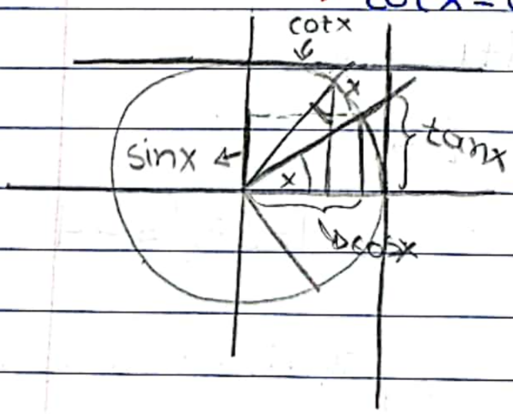
Λογάριθμοι

- Αν έχω $a>0$, $a\neq 1$ και $a^x = y$ τότε $x = \log_a y$
- Αν $a = e$ τότε $x = \ln y$

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

→ $\sin x = ημx$ → $\cos x = συνx$ → $\tan x = εφx$

→ $\cot x = συνεφx$

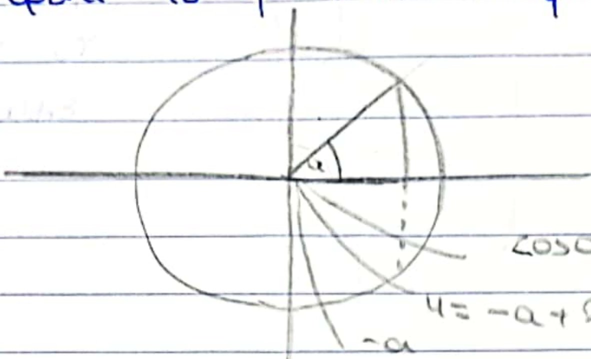


x γωνία σε ακτίνια (rad) = μήκος του αντίστοιχου τόξου.

Π.χ. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Άσκηση

Να βρείτε το y τ.ω. $\cos y = \cos a$



$y = a + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\cos a = \cos y$

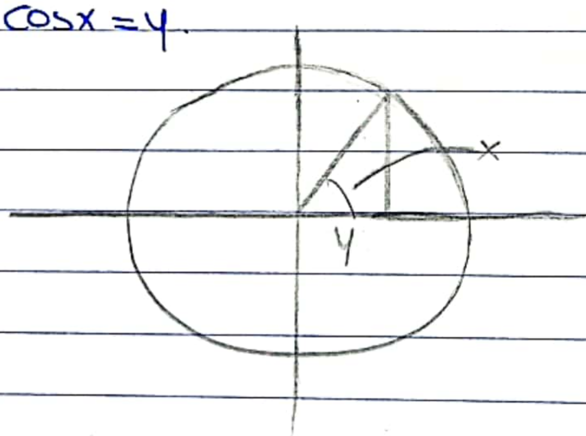
$y = -a + 2k\pi$

Άρα $y = a + 2k\pi$ ή $y = -a + 2k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

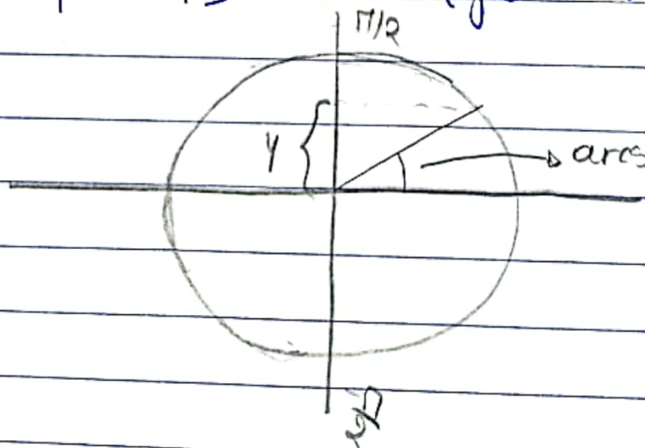
Ορισμός

i) Έστω $y \in [-1,1]$. Ορίζω ως $\arccos y$ = το τόξο $x \in [0,\pi]$ τ.ω. $\cos x = y$.

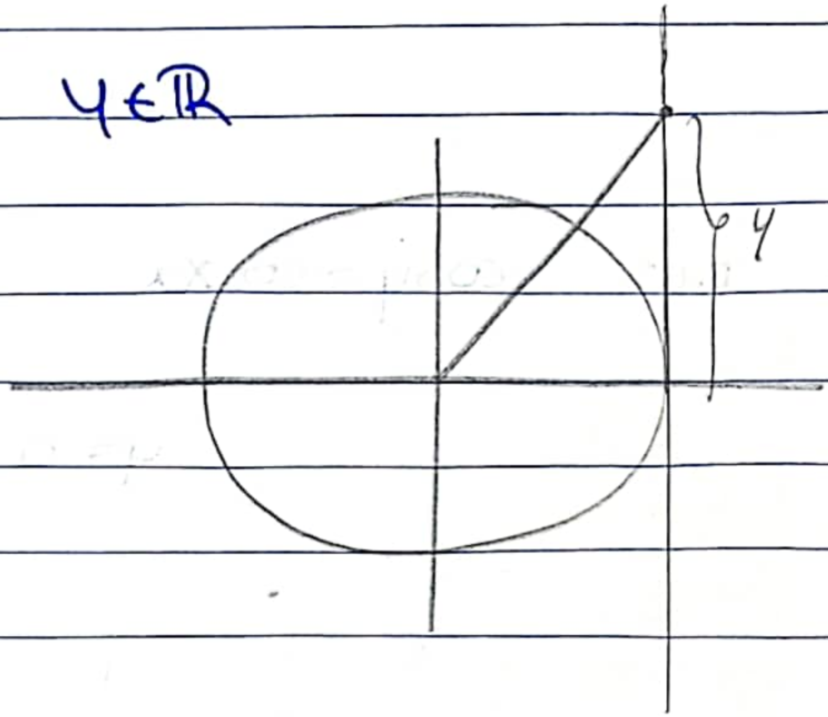


με αυτόν τον περιορισμό ορίζεται μονοσήμαντα!!

ii) Αν $y \in [-1,1]$ τότε ορίζω $\arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$ το τόξο που έχει $\sin = y$



iii) $y \in \mathbb{R}$



$\arctan y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

↑

το τόξο που έχει εφαπτομένη y.