Ακολουθίες

→ Αυστηρός ορισμός:
Είναι μία απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$, δηλ. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

→ Διαισθητικά:

Άπειρη επιλογή αριθμών σε συγκεκριμένη σειρά.

π.χ. $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$x_n = n$: $1, 2, 3, 4$

$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$: $0, 1, 0, \frac{2}{4}, 0, \frac{2}{6}, \dots$

Ορισμός

→ $\{x_n\}$ αύξουσα αν $x_{n+1} \geq x_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$

→ $\{x_n\}$ γνησίως αύξουσα αν $x_{n+1} > x_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$

→ $\{x_n\}$ φθίνουσα αν $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$

→ $\{x_n\}$ γνησίως φθίνουσα αν $x_{n+1} < x_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$

Ορισμός

→ $\{x_n\}$ είναι άνω φραγμένη αν $x_n \leq u$ $\forall n$, $(u \in \mathbb{R})$

→ $\{x_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αν $x_n \geq \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$

→ $\{x_n\}$ φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

$x_n = (-1)^n \cdot n$
ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη !!

Ορισμός ακολουθίας με αναδρομικό τύπο

Παράδειγμα:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_n = 5x_{n-1} + 3x_{n-2}$, $n = 3,4,5$

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ (Fibonacci)

Όριο ακολουθίας

→ Η $\frac{1}{n}$ διαισθητικά πλησιάζει το 0.

→ Η $x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ διαισθητικά πλησιάζει το 1.

Ορισμός

Η $\{x_n\}$ συγκλίνει (ή τείνει) στο x (και γράφω $x_n \to x$ ή $\lim x_n = x$) ανν $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\boxed{\forall\ n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \varepsilon}$$

Παρατήρηση

Το όριο μιας ακολουθίας (αν υπάρχει) είναι μοναδικό!

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\frac{1}{n} \to 0$ $(x=0)$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο. Θέλω να βρω n_0 τ.ω. για $n \geq n_0$,
$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ δηλ. για $n \geq n_0$ να έχω $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Επειδή η $\frac{1}{n}$ φθίνει αρκεί να υπάρχει n_0 τ.ω. $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Η Αρχιμήδεια ιδιότητα εξασφαλίζει την ύπαρξη τέτοιου n_0.
Τότε όμως,

$\forall\ n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}<\varepsilon$ και συνεπώς,

$x_n=\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα

Ελέγξετε ως προς την σύγκλιση την $x_n=\dfrac{1}{n^6+3n+1}$

Λύση

Διαισθητικά βλέπω ότι η x_n πρέπει να πηγαίνει στο 0.
Πρέπει όμως και να δώσω αυστηρή απόδειξη.
Θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό.

Έστω $\varepsilon>0$, τυχαίο, θα πρέπει να δείξω ότι υπάρχει n_0 τ.ω. για $n \geq n_0$:

$$|x_n-0|<\varepsilon \quad \text{δηλ.} \quad \frac{1}{n^6+3n+1}<\varepsilon$$

Όμως $\dfrac{1}{n^6+3n+1}<\dfrac{1}{n^6} \leq \dfrac{1}{n}<\varepsilon$ όταν $n \geq n_0$ (από Αρχιμήδεια ιδιότητα)

(Χρησιμοποίησα ανισότητες και το ανήγαγα σε κάτι απλό!)

Δηλ. έχω ότι:

$$x_n < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{για } n \geq n_0 \quad \text{για κάποιο } n_0.$$

Παράδειγμα

Ελέγξετε ως προς την σύγκλιση $x_n = \frac{\sin(n)}{n}$

Λύση

Διαισθητικά πάει στο 0. Για να το αποδείξω θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό.
Έστω $\varepsilon > 0$ θα δείξω ότι $\exists\, n_0$ τ.ω. $\forall\, n \geq n_0$,

$$\left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| < \varepsilon \implies \frac{|\sin(n)|}{n} < \varepsilon.$$

Επειδή:

$$|\sin(n)| \leq 1 \quad \text{έχω ότι} \quad \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Και συνεχίζουμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα!

Παράδειγμα

Ελέγξετε ως προς την σύγκλιση την $x_n = (-1)^n$, $[-1, 1, -1, 1, \dots]$

Λύση

Διαισθητικά δεν συγκλίνει.
Δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}$ στο οποίο να πλησιάζουν όλοι οι όροι.

Τώρα θα δώσω αυστηρή απόδειξη με τον ορισμό!

Έστω ότι η x_n συγκλίνει στο x. (Θα καταλήξω σε άτοπο)

Έστω ε μικρό (π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{10}$)

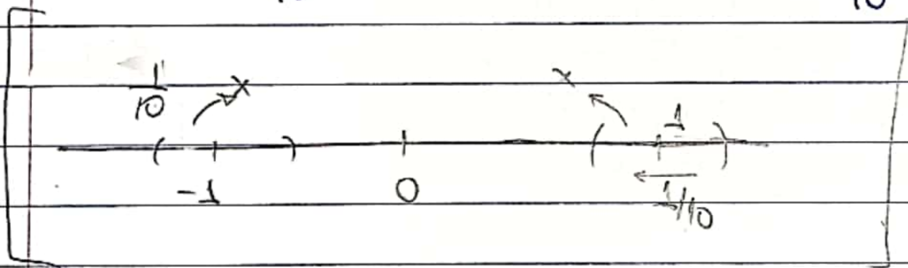
τότε $\exists\, n_0$ τ.ω. $|x_n - x| < \frac{1}{10}$ για $n \geq n_0$.

Όταν $n \geq n_0$ και n περιττός τότε έχω ότι $|-1-x| < \frac{1}{10}$

Όταν το $n \geq n_0$ και n άρτιος τότε έχω ότι $|1-x| < \frac{1}{10}$

Δηλαδή έχω ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι ανισότητες:

$$|1+x| < \frac{1}{10} \quad \text{και} \quad |1-x| < \frac{1}{10}$$



Τότε όμως: $2 = \left|(1+x) + (1-x)\right| \leq |1+x| + |1-x| \leq \frac{2}{10}$.

Δηλ. $2 < \frac{2}{10}$ Άτοπο!

Όρια ακολουθιών

Έχουμε δώσει ορισμό για $x_n \to x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός (όταν $x_n \to +\infty$)

Εάν $\forall M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$, $x_n > M$.

Ορισμός (όταν $x_n \to -\infty$)

Εάν $\forall M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ $x_n < -M$.

π.χ.

$x_n = n^2 \to +\infty$ (διαισθητικά)

Απόδειξη

Εάν $M>0$ τυχαίο.
Θέλω $n_0^2 > M$ (να βρω τέτοιο n_0)
Άρα αρκεί $n_0 > \sqrt{M}$

π.χ. : $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$ (διότι : $[\sqrt{M}] \leq \sqrt{M} < [\sqrt{M}] + 1$)

Οπότε για $n \geq n_0$ τότε $n^2 \geq n_0^2 > M$.
Από τον ορισμό:

$$x_n \to +\infty.$$

Πρόταση

Αν η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ($x_n \to x \in \mathbb{R}$) τότε η x_n φραγμένη.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon=1$ (τυχαία επιλογή), τότε $\exists\ n_0$ τ.ω. :

$$|x_n - x| < 1 \quad \text{για } n \geq n_0$$

Η ανισότητα ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί:

$$-1 < x_n - x < 1 \iff x-1 < x_n < x+1 \leq 1+|x| \iff$$
$$-1-|x| \leq$$

$$-(1+|x|) < x_n < 1+|x| \iff$$

$$|x_n| < 1+|x|$$

Άρα μέχρι στιγμής έχω δείξει ότι $\forall\ n \geq n_0$, $|x_n| < 1+|x|$

Άρα $|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1+|x|\} = M$
$\forall\ n = 1, 2, 3, \dots$

Υπακολουθία

(Διαισθητικά)

Έστω ακολουθία x_k: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$

Η υπακολουθία της: $x_1, x_4, x_7, x_{500}, x_{1000}, \dots$ (κρατάω άπειρο πλήθος).
$(n_1=1, n_2=4, n_3=7, n_4=500, \dots)$

Ορισμός

Επιλέγω άπειρους φυσικούς αριθμούς $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k <$ και σχηματίζω την υπακολουθία x_{n_k}. Η $\{x_{n_k}\}$ λέγεται υπακολουθία της x_n.

Προφανώς έχουμε ότι $n_k \geq k$.

Πρόταση

Αν $x_n \to x$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο.
Δηλ. $x_{n_k} \to x$. ($x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty$, $x = -\infty$)

Σημαντική συνέπεια

Αν η x_n έχει 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια, η x_n δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα

Η ακολουθία $x_n = (-1)^n$
Η $x_{2k} = 1$ (σταθερή ακολουθία) $\longrightarrow 1$
$x_{2k+1} = -1 \longrightarrow -1$

Δηλαδή έχω 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια.
Άρα η $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει !!

Όρια και αλγεβρικές πράξεις

- Αν έχω ακολουθία $x_n \to x \in \mathbb{R}$ και $y_n \to y \in \mathbb{R}$.

$$x_n + y_n \longrightarrow x + y$$

- Αν έχω $a \in \mathbb{R}$ τότε: $a \cdot x_n \longrightarrow ax$
και $b \in \mathbb{R}$ τότε:

$$a x_n + b y_n \longrightarrow ax + by$$

- Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ και $y_n \to +\infty$ τότε:

$$x_n + y_n \to +\infty.$$

- Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ και $y_n \to -\infty$ τότε:

$$x_n + y_n \to -\infty.$$

- Αν $x_n \to +\infty$ και $y_n \to -\infty$ τότε:

$x_n + y_n \Rightarrow$!! απροσδιόριστη μορφή και δεν μπορούμε να πούμε κάτι γενικά !!

- Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $y_n \to y \in \mathbb{R}$, τότε:

$$x_n \cdot y_n \to xy$$

Απόδειξη (πολύ αναλυτική)

Έχω 3 ακολουθίες $(x_n, y_n, x_n y_n)$ και θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό του ορίου 3 φορές!!

Επειδή $x_n \to x$ (γνωστό) $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists n_{01}$ τ.ω. :

$$|x_n - x| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq n_{01}$$

Όμοια $y_n \to y$ (γνωστό) $\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists n_{02}$ τ.ω. :

$$|y_n - y| < \varepsilon_2 \quad \forall n \geq n_{02}$$

Άρα για $n \geq \bar{n} = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ έχω και τις 2.
$|x_n - x| < \varepsilon_1$, $|y_n - y| < \varepsilon_2$ $\forall n \geq \bar{n}$.

Μέχρι στιγμής έγραψα τις πληροφορίες που έρχονται από τα δεδομένα. Τώρα πάω να αποδείξω την πρόταση.

Έστω ε>0 τυχαίο. Έχω:

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n + x_n y - x_n y - xy| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)|$$

$$\leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|$$

Επειδή $x_n \to x$ έχω ότι:

$|x_n| < M$ για κάποιο M θετικό!

Οπότε συνεχίζω την ανισότητα για $n \geq \bar{n}$:

$$|x_n| \cdot |y_n - y| + |y||x_n - x| \leq M\varepsilon_1 + |y|\varepsilon_2$$

Θέλω η ποσότητα $M\varepsilon_1 + |y|\varepsilon_2$ να είναι $< \varepsilon$

!! Για να καταφέρω αυτό αρκεί να κάνω καλές επιλογές (αρχικά) στα ε_1 και ε_2. !!

Πχ:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|y|}$$ (με το $y \neq 0$.)

Τότε $M\varepsilon_1 + |y|\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ για $n \geq \bar{n} = n_0$.