Παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων

1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$, αναλύω σε απλούστερα κλάσματα.

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x-(B+2A)}{(x-1)(x-2)}$$

Λύνω το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ B+2A=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=2 \\ A=-1 \end{array}$$

Τελικά: $\displaystyle\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

Είναι:

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1} + 2\int \frac{1}{x-2} =$$

$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + c$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = x\,\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'$$

ολοκλήρωση κατά μέρη στο όρο -2-

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \int \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}}_{\arctan x}\Big) = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$, $u = \tan\frac{x}{2}$, $x = 2\arctan u$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2u}{1+u^2}$$

$x = \phi(u)$

$dx = \phi'(u)\,du$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Συνεπώς : $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}} = \int \frac{du}{u}\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}} =$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Τύπος Taylor με υπόλοιπο σε μορφή ολοκληρώματος

f $(n+1)$ φορές παραγωγίσιμη

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\xi)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Έχουμε δει το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)\,dx$

Βασικές προϋποθέσεις για να ορίζεται είναι:

1) Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$

2) Το διάστημα $[a,b]$ είναι φραγμένο.

π.χ. δεν μπορεί να είναι το $(0,\infty)$

Πώς μπορώ να ορίσω ολοκλήρωμα όταν κάποιο από τα 1) ή 2) δεν ισχύουν? (θα δώσω παραδείγματα)

Π1) Θέλω να ορίσω $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

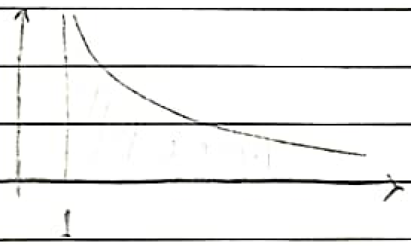
Αν $c>1$ το $\int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx$ ορίζεται και μπορεί να υπολογιστεί

$$\int_1^c x^{-p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^c = \frac{c^{-(p-1)}-1}{-(p-1)}, \quad (p\neq 1)$$

Παίρνω το όριο $c\to+\infty$ $\quad \lim_{c\to+\infty}\int_1^c x^{-p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ +\infty, & p=1 \\ +\infty, & p<1 \end{cases}$

Ορίζω $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c x^{-p}\,dx$, εφόσον το όριο υπάρχει.

άρα για $p>1$: $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \frac{1}{p-1}$



αν $p=1$ $\quad \int_1^c x^{-1}\,dx = \ln c$

Π2) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, $p>0$ (Το διάστημα $(0,1)$ είναι πεπερασμένο αλλά η συνάρτηση απειρίζεται)

$(\varepsilon>0)$ $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} x^{-p}\,dx = \frac{1-\varepsilon^{-(p-1)}}{-(p-1)}$

Ορίζω $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} 1/1-p \,, & p<1 \\ +\infty \,, & p=1 \text{ (εμφανίζεται λογάρ)} \\ +\infty \,, & p>1 \end{cases}$

Π3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{0}^{c}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\arctan c = \frac{\pi}{2}$

Πρόταση

Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int f$, $\int g$ υπάρχουν τότε:

$$\int \lambda f = \lambda \int f \,, \quad \int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

Πρόταση 2

$f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $f(x)\geq 0$, τότε $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ είναι ίσο με $a\in\mathbb{R}$ ή $+\infty$.

Σημαντικό κριτήριο σύγκλισης

Έχω 2 συναρτήσεις $f,g : [a,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a,c]$ και $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall\, x>a$: Αν το $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει (επιλ. υπάρχει) τότε υπάρχει και το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει και $\displaystyle\left|\int_a^{\infty} f\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Απόδ.

$|f(x)| \leq g(x) \Rightarrow f(x)+g(x)\geq 0 \quad \forall\, x>a$

άρα από Πρότ. 2. το $\int_0^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ είναι αριθμός (δηλ. υπάρχει)

ή $= +\infty$. Όμως $f(x)+g(x) \le 2g(x) \Rightarrow \int_\alpha^{+\infty} f(x)+g(x) \le 2\int_a^{+\infty} g(x)dx \in \mathbb{R}$

άρα και το:

$\int_\alpha^{+\infty} (f(x)+g(x))\,dx$ υπάρχει.

Όμως $\int_\alpha^{+\infty} f\,dx = \int_a^{+\infty} [(f+g)-g]\,dx \overset{\Pi_1}{=} \int_0^{+\infty} (f+g)dx - \int_a^{\infty} g\,dx \in \mathbb{R}$

Παραδείγματα

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ όμως $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$ $(p>1)$

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} = -\int_1^{\infty} \frac{(\cos x)'}{x}\,dx = -\int_1 \underbrace{\frac{\cos x}{x^2}}_{\text{υπάρχει}} - \left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{\infty}$

Δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το κριτήριο σύγκρισης αλλά το ολοκλήρωμα υπάρχει.