Κριτήριο σύγκλισης

$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g > 0$.
Αν $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, υπάρχει.

Απόδειξη

Από την υπόθεση έχω ότι για x κοντά στο $+\infty$,
$$\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2k$$
Άρα, $\frac{k}{2} g(x) < f(x) < 2k\,g(x)$. Από κριτήριο σύγκρισης έχω το αποτέλεσμα.

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει, αρκεί για x κοντά στο $+\infty$ να έχω:

$$0 < c_1 < \frac{f(x)}{g(x)} < c_2 < +\infty.$$

π.χ.

$$\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}_{f}\,dx \quad , g = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Άρα το $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ υπάρχει επειδή υπάρχει το $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

! Αντίστοιχο κριτήριο όταν απειρίζεται η f και είμαι σε πεπερασμένο.

το διάστημα.

Π.χ.

Το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ υπάρχει, άρα και το $\int_0^1 \frac{(1+x+x^2)}{\sqrt{x}} dx$ υπάρχει.

Σειρές

Έστω (x_n) ακολουθία και $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Η ποσότητα $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ονομάζεται σειρά. Δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim S_n$.

Η S_n ονομάζεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων.

Π.χ. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots = \frac{1}{1-a}$, $|a|<1$

$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \longrightarrow \frac{1}{1-a}$

Ορισμός

Αν η $S_n \to S \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο S.

Αν η $S_n \to \pm\infty \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο $\pm\infty$

Πρόταση

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο $S \in \mathbb{R}$ τότε $x_n \to 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη:

Η σειρά συγκλίνει άρα $S_n \to S \in \mathbb{R}$ όμως και $S_{n-1} \to S$.

$x_n = S_n - S_{n-1} = S - S = 0$

Πρόταση

Αν $\sum_{n=1} x_n = S \in \mathbb{R}$ (δηλ. συγκλίνει) τότε $\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} x_k}_{\text{ουρά της σειράς}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Απόδειξη

Αν $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \underbrace{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} + \underbrace{x_n + x_{n+1} + \dots} =$$

$$= S_{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} x_k \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} x_k = S - S_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k = S - S = 0$$

Πρόταση

Αν $\sum x_k$, $\sum y_k$ συγκλίνουν και η $\sum(\lambda x_k + \mu y_k)$ συγκλίνει στο $\lambda \sum x_k + \mu \sum y_k$.

Πρόταση

Αν $0 \leq x_k \leq y_k$ τότε αν $\sum y_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum x_k$ συγκλίνει

Αν $\sum x_k \to +\infty$ τότε $\sum y_k \to +\infty$.

$S_n = x_1 + \dots + x_n$ είναι $\uparrow$

$t_n = y_1 + \dots + y_n$ είναι $\uparrow$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)$

$n! = 1\cdot \underbrace{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}_{n-1} > 1\cdot 2^{n-1}$ δηλ. $n! > 2^{n-1}$, $n>3$

$\Rightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ (γεωμετρική με $a=\frac{1}{2}<1$)

άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει.

Άρα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Ολοκληρωτικό κριτήριο σύγκλισης

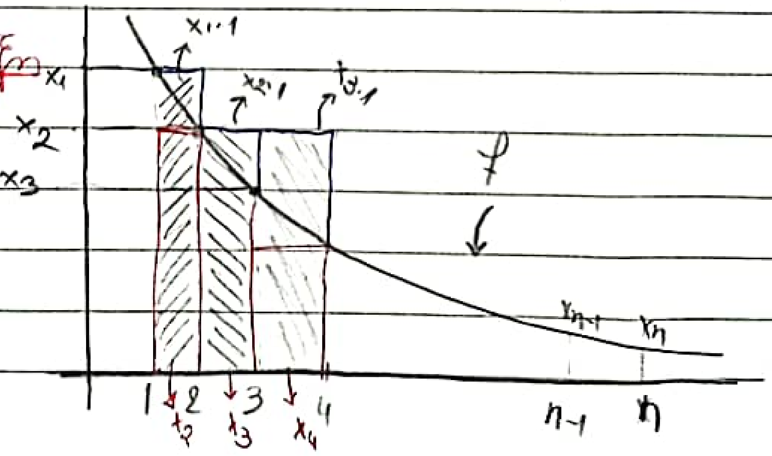
Έστω $x_n \geq 0$ και x_n φθίνουσα και έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα και τέτοια ώστε $x_n = f(n)$, $n=1,2,3,\ldots$

Τότε:

(i) Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\int_1^{\infty} f(t)\,dt < +\infty$

(ii) Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{\infty} f(t)\,dt = +\infty$

Απόδειξη



Θα δείξω ότι $\int_1^{\infty} f(t)\,dt \le \sum_{n=1}^{\infty} \underset{f(n)}{\overset{\|}{x_n}} \le x_1 + \int_1^{\infty} f(t)\,dt$

Το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της f είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της μπλε γραμμής.

Τα $x_2+x_3+x_4+\dots \le \int_1^{\infty} f(t)\,dt \Rightarrow$

(προσθέτουμε το x_1) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \le x_1 + \int_1^{\infty} f(t)\,dt$

π.χ.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \; p>0, \quad f(x)=\frac{1}{x^p}, \; x\geq 1$

Ικανοποιούνται πλήρως οι προϋποθέσεις του κριτηρίου!
Άρα η $\sum \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, αν και μόνο αν $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx < +\infty$.

Συνεπώς, συγκλίνει για $p>1$ και πάει στο $+\infty$ για $p\le 1$.

Για $p=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ λέγεται αρμονική σειρά και αποκλίνει στο $+\infty$.

!! Το θυμόμαστε ως θεωρία.

π.χ.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+3n+5}$ συμπεριφέρεται όπως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ άρα συγκλίνει.

Κριτήριο συμπύκνωσης

$x_n \geq 0$ και $x_n \downarrow 0$, $n \geq 1$. Τότε:

(i) η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$ ανν $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$

(ii) η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ ανν $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = +\infty$

Απόδειξη

Για $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$

$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + \dots + x_7) + \dots +$
$+ (x_{2^{k-1}} + \dots + x_{2^k - 1}) + (x_{2^k} + \dots + x_n) \leq$

$\leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \dots + 2^{k-1} x_{2^{k-1}} + 2^k x_{2^k}$

$\Rightarrow$ αν η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$ (συγκλίνει), συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Για την άλλη κατεύθυνση, έχω: αυτό είναι > από το x_8.

$x_1 + 2x_2 + \underline{4x_4} + \dots + 2^k x_{2^k} \leq 2x_1 + 2x_2 + \underline{2(x_3 + x_4)} + 2(x_5 + x_6 + x_7 + x_8) +$
αυτό είναι > από το $4x_4$

$+ \dots + 2\left(x_{2^{k-1}+1} + \dots + x_{2^k}\right) = 2\left(x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}\right) < 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Συνεπώς αν η σειρά $\sum x_n < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$.

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$ με $a = \frac{1}{2^{p-1}}$

Είναι η γεωμετρική σειρά και συγκλίνει όταν το $a<1$
δηλαδή $2^{p-1}>1 \Leftrightarrow p>1$.

Παράδειγμα

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^{\theta}}, \quad (\theta>0)$$

Εφαρμόζω το κριτήριο συμπύκνωσης.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k}(\ln 2^k)^{\theta}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^{\theta}} \cdot \frac{1}{k^{\theta}} =$$

$$= \frac{1}{(\ln 2)^{\theta}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\theta}} \quad \text{συγκλίνει } \underline{\text{ανν}} \ \theta>1$$

άρα και η $\sum \frac{1}{n(\ln n)^{\theta}}$ συγκλίνει $\underline{\text{ανν}}$ $\theta>1$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών (με όρους όχι απαραίτητα μη αρνητικούς)

Ορισμός
Η $\sum x_n$ συγκλίνει απόλυτα όταν $\sum |x_n| < \infty$.

Πρόταση
Αν η $\sum x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

απόδειξη απλή.

Κριτήριο ρίζας (Cauchy)

Έστω ότι $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = \ell$

(i) Αν $\ell<1$ τότε η $\sum x_n$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως

(ii) Αν $\ell>1$ (ή $+\infty$) τότε η $\sum x_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη

(i) Έστω $\ell<1$ για $n\ge n_0$ έχω ότι $\sqrt[n]{|x_n|}\le a<1$
Τότε όμως $|x_n|\le a^n$ άρα η $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n| < \sum_{n=n_0}^{\infty} a^n <+\infty$ διότι $0<a<1$

Π.χ.

$$x_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ ?$$

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

Π.χ.

$$x_n = \frac{(-2)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ ?$$

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 2 > 1$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

Κριτήριο Λόγου (D' Alambert)

Αν $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \ell$, τότε:

i) $\ell<1$ η $\sum x_n$ συγκλίνει απόλυτα.

ii) $\ell>1$ η $\sum x_n$ αποκλίνει

Απόδειξη

(i) Έστω $\ell<1$ τότε $\exists$ n_0 τ.ω. για $n\geq n_0$ το $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leq a<1 \Rightarrow$ για $n\geq n_0$:

$\Rightarrow |x_{n+1}|<a|x_n|$

$|x_{n_0+1}|\leq a|x_{n_0}|$

και γενικά

$|x_{n_0+2}|\leq a|x_{n_0+1}|\leq a^2|x_{n_0}|$

$|x_{n_0+3}|\leq a^3|x_{n_0}|$

$|x_n|\leq a^{n-n_0}|x_{n_0}| = a^{-n_0}|x_{n_0}|\cdot a^n$

$n=n_0+(n-n_0)$

$$\Rightarrow \sum_{n_0}^{+\infty}|x_n| \leq a^{-n_0}|x_{n_0}|\sum_{n_0}^{\infty}a^n<\infty \quad (a<1)$$

Π.χ.

$x_n=\frac{n^2}{2^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}<1$$

Άρα έχω σύγκλιση.

Π.χ.

$x_n=\frac{2^n}{n!}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\xrightarrow[n\uparrow\infty]{}0<1$$

Άρα έχω σύγκλιση.

Π.χ.

$x_n=\frac{n^n}{n!}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e>1$

άρα η $\sum x_n$ αποκλίνει.

$\sum \frac{1}{n^p}$, $p>0$

κριτήριο ρίζας: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} \longrightarrow 1$

Δεν εφαρμόζεται το κριτήριο.

Κριτήριο λόγου: $\frac{1}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \longrightarrow 1$

Δεν εφαρμόζεται το κριτήριο.

Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων

Αν $b_n \geq 0$, $b_n \downarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συγκλίνει

π.χ.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

Ορισμός

Αν η $\sum x_n$ συγκλίνει αλλά όχι η $\sum |x_n|$ τότε λέμε ότι η $\sum x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη.