Δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \dots, \quad a_n \in \mathbb{R}, \ \xi = \text{σταθερός αριθμός.}$$

Λέγεται δυναμοσειρά με κέντρο το ξ και συντελεστές τα a_n.
Σίγουρα έχω σύγκλιση για $x=\xi$.
Για ποια άλλα x έχω σύγκλιση?

π.χ.

Η γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-\xi)^n$, $(a_n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N})$

Ξέρουμε ότι: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-\xi)^n = \dfrac{1}{1-(x-\xi)}$ όταν $|x-\xi|<1$

Ορισμός

Τα x για τα οποία μια δυναμοσειρά συγκλίνει είναι το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Πρόταση 1

Αν έχω την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\xi)^n$ υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

(i) Σύνολο σύγκλισης $= \mathbb{R}$

(ii) Σύνολο σύγκλισης $= \{\xi\}$

(iii) $\exists R>0$ τ.ω. το σύνολο σύγκλισης είναι ένα από τα παρακάτω διαστήματα:

$$[\xi-R, \xi+R], \ (\xi-R, \xi+R), \ [\xi-R, \xi+R), \ (\xi-R, \xi+R]$$

Δηλ. $\exists \ 0 \le R \le +\infty$ $\left(\begin{array}{l} \text{για } R=+\infty \text{ έχω την (i)} \\ \quad R=0 \text{ έχω την (ii)} \end{array} \right)$

Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης.

Πρόταση 2

Αν υπάρχει και $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \mu$, τότε $R = \frac{1}{\mu}$

(αν $\mu = 0 \Rightarrow R = +\infty$, αν $\mu = +\infty \Rightarrow R = 0$)

Απόδ.

Έστω $0 < \mu < +\infty$ (παρόμοια οι άλλες) και εφαρμόζω κριτήριο λόγου για x = σταθ. $\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \mu|x-\xi|$

Άρα · αν $|x-\xi|\mu < 1$ έχω σύγκλιση
· αν $|x-\xi|\mu > 1$ έχω απόκλιση

άρα $|x-\xi| < \frac{1}{\mu}$ έχω σύγκλιση συνεπώς $R = \frac{1}{\mu}$

Πρόταση 3

Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \to \mu$, τότε $R = \frac{1}{\mu}$ (παρόμοια απόδειξη)

Π.χ.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ (δυναμοσειρά με κέντρο το $\xi = 0$)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 = \mu \Rightarrow R = 1$ Άρα έχω σύγκλιση για $x \in (-1, 1)$

Ελέγχω τα άκρα του διαστήματος.

Για $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^n$

Για $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

συγκλίνει!

Τελικό σύνολο σύγκλισης $= [-1, 1]$

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ άρα $R=1$

Έχω σύγκλιση για $x \in (-1,1)$

για $x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

για $x=-1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

Άρα σύνολο σύγκλισης $= [-1,1)$

Γεωμετρική: $\sum_n x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

Taylor

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-\xi)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n + \dots$$

Παρατήρηση

Μπορώ να αναπτύξω την f σε δυναμοσειρά μέσω αναπτύγματος Taylor.

Πρόταση

Έστω $f(x) = \sum a_n (x-\xi)^n$ και $R>0$. Τότε:

(i) η f είναι συνεχής στο $(\xi-R, \xi+R)$

(ii) η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-\xi)^{n-1}$

Παραδείγματα / Παρατηρήσεις

$f(x) = \ln(1+x)$, για $x>-1$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$ ...

$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=-1$, $f^{(3)}(0)=2$, $f^{(4)}(0)=-2\cdot 3$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

$\mu=\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, άρα σίγουρα έχω σύγκλιση στο $(-1,1)$

Για $x=-1$: $\sum\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum\frac{1}{n}$ αποκλίνει

Για $x=1$: $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει

άρα το σύνολο σύγκλισης είναι $(-1,1]$

Για $x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(1+1)=\ln 2$

Π.χ. Taylor γύρω από $\xi=0$

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+\dots$$

$$\mu=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad \text{άρα } R=+\infty$$

άλλος τρόπος: (με μελέτη του υπολοίπου)

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+\underbrace{\frac{e^{\eta}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{=R_n}$$

όπου η μεταξύ 0 και x

Για ποια x το $R_n=\frac{e^{\eta}}{(n+1)!}x^{n+1}\xrightarrow[n\uparrow\infty]{?}0$

Έστω $x>0$. (παρόμοια το $x<0$): Για $x=$ σταθ: (οποιοδήποτε!)

$$e^{\eta}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

Ερώτηση: Τι κάνει η $\frac{a^n}{n!}\to ?$ $(a>0)$

Άσκηση

Δείξτε ότι: $\frac{a^n}{n!} \to 0 \quad (a>0)$

Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $n_0 > a$ και $n > n_0$.

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a \cdots a}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n_0-1)}_{(n_0-1)!} \cdot n_0 (n_0+1) \cdots n} = \frac{a^{n_0-1}}{(n_0-1)!} \cdot \frac{a}{n_0} \cdot \frac{a}{(n_0+1)} \cdots \frac{a}{n} <$$

$$< \frac{a^{n_0-1}}{(n_0-1)!} \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0+1} = \cancel{\frac{1}{(n_0+1)!} \underbrace{\left(\frac{a}{n_0}\right)^n}_{<1} \to 0} \quad , \frac{a}{n_0} < 1$$

$$= \underbrace{\frac{a^{n_0-1}}{(n_0-1)!} \cdot \left(\frac{a}{n_0}\right)^{-n_0+1}}_{\text{σταθερές}} \cdot \left(\frac{a}{n_0}\right)^n \longrightarrow 0$$

Επανάληψη

- $\sum \frac{1}{n^p}$: συγκλίνει για $p>1$, αποκλίνει ≤ 1.

- $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$: συγκλίνει για $p>0$ (συγκλίνει απόλυτα για $p>1$, υπό συνθήκη για $p\leq 1$)

- $\sum \frac{(-1)^n}{n^p+1}$: συγκλίνει για $p>0$ (απόλυτα συγκλίνει για $p>1$, υπό συνθήκη για $p\leq 1$)

- $\sum \frac{(-1)^n}{n^p-1}$: συγκλίνει για $p>0$ (απόλυτα συγκλίνει για $p>1$, υπό συνθήκη για $p\leq 1$).

- $\sum \frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$: $a_n = \frac{1}{n^p+(-1)^n}$, $\sum a_n$

$$\frac{\frac{1}{n^p+(-1)^n}}{\frac{1}{n^p}} = \frac{n^p}{n^p+(-1)^n} = \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^p}} \longrightarrow 1$$

Συνεπώς για $p>1$ έχω σύγκλιση της $\sum a_n$ άρα έχω απόλυτη σύγκλιση της : $\sum_{n=2} \frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$

Τι συμβαίνει για $0<p\leq 1$?
Ελέγχω αν η $a_n = \frac{1}{n^p+(-1)^n}$ είναι φθίνουσα.

Θα πρέπει: (i) $a_{2k} \geq a_{2k+1}$
(ii) $a_{2k-1} \geq a_{2k}$

(i) $\frac{1}{(2k)^p+1} \geq \frac{1}{(2k+1)^p-1} \iff (2k+1)^p - 1 \geq (2k)^p + 1 \iff$
$(2k+1)^p > (2k)^p + 2 \iff$

Για $p=1$ $\quad 2k+1 \geq 2k+2$ $\quad$ <u>ΟΧΙ!</u>

Δουλεύω άλλο τρόπο: $\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n\left(n^p-(-1)^n\right)}{\left(n^p+(-1)^n\right)\left(n^p-(-1)^n\right)} =$

$$= \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1} - \frac{1}{n^{2p}-1}$$

η $\sum \dfrac{1}{n^{2p}-1}$ συγκλίνει εάν και μόνο αν συγκλίνει η $\sum \dfrac{1}{n^{2p}}$ δηλ. αν $p>\dfrac{1}{2}$ (1)

Ελέγχω την $\sum \dfrac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}$, αν η $b_n = \dfrac{n^p}{n^{2p}-1}$ είναι φθίνουσα έχω σύγκλιση.

Θεωρώ $f(x) = \dfrac{x^p}{x^{2p}-1}$, $p>0$, $x>100$

$$f'(x) = \frac{px^{p-1}(x^{2p}-1) - 2px^{2p-1}\cdot x^p}{(x^{2p}-1)^2} = \frac{x^{p-1}(px^{2p}-p-2px^{2p})}{(x^{2p}-1)^2} = \frac{px^{p-1}(-x^{2p}-1)}{(x^{2p}-1)^2} =$$

$$= -\frac{px^{p-1}(x^{2p}+1)}{(x^{2p}-1)^2} < 0.$$

Άρα $f(x)\downarrow \Rightarrow b_n \downarrow$

Συνεπώς η $\sum \dfrac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}$ συγκλίνει $\forall\, p>0$ (2)

Από (1) και (2) έχω ότι η $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ συγκλίνει για $p>\dfrac{1}{2}$

και αποκλίνει για $0<p\leq\dfrac{1}{2}$

!! $\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n} - \dfrac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1} = -\dfrac{1}{n^{2p}-1}$ $\quad$ Αν έχω σύγκλιση της $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ για κάποιο $0<p\leq\dfrac{1}{2}$

επειδή η ; συγκλίνει για $p\geq 0$

θα έχω ότι και η $\dfrac{1}{n^{2p}-1}$ συγκλίνει για $0<p\leq\frac{1}{2}$ Άτοπο!

Άσκηση 1

$f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο $(C^1[\alpha,b])$

Δείξτε ότι: $\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^b f(x)\cos(nx)\,dx=0$

Λύση

$$\int_\alpha^b f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n}\int_\alpha^b f(x)(\sin(nx))'\,dx=-\frac{1}{n}\int_\alpha^b f'(x)\sin(nx)\,dx+$$

$$+\frac{1}{n}f(x)\sin(x)\Big|_\alpha^b$$

$$\|$$

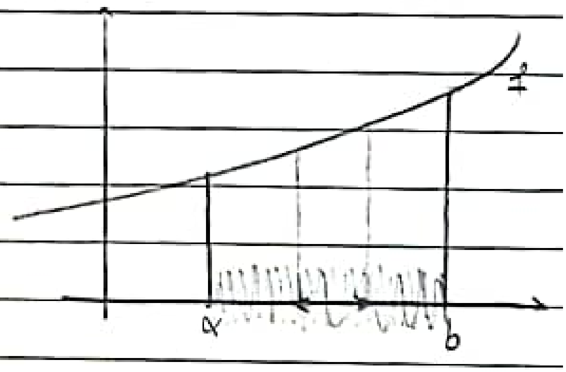
$$\frac{1}{n}f(b)\sin(nb)-\frac{1}{n}f(a)\sin(na)$$

Όμως ως $\frac{1}{n}\left|f(\alpha)\sin(n\alpha)\right|\le\frac{1}{n}\left|f(\alpha)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ και παρόμοια $\frac{1}{n}f(b)\sin(nb)\to 0$

$$\left|\frac{1}{n}\int_\alpha^b f'(x)\sin(nx)\,dx\right|\le\frac{1}{n}\int_\alpha^b|f'(x)|\,|\sin(nx)|\,dx\le\frac{1}{n}\int_\alpha^b|f'(x)|\,dx\le$$

!! (Η f' είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha,b]$ άρα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή άρα $|f'(x)|\le M<+\infty$.)

$$\le\frac{1}{n}\int_\alpha^b M\,dx=\frac{M(b-\alpha)}{n}\to 0$$



Άσκηση 2

Μελετήστε ως προς την σύγκλιση:

$$a_n=\left(1+n(1+\cos n)\right)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$$

$$2n+n\sin n\ge 2n+n(-1)=n\Rightarrow\frac{1}{2n+n\sin n}\le\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow 1 < a_n < (2n+1)^{1/n} < (2n+n)^{1/n} = (3n)^{1/n} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n} \to 1\cdot 1 = 1$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής η $a_n \to 1$.

Άσκηση 3

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^a(-\ln x)^b}, \quad a,b\in\mathbb{R}$$

Αλλαγή μεταβλητών: $-\ln x = t$, $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t}dt$

Άρα το I γράφεται: $\displaystyle\int_{\infty}^{0} \frac{-e^{-t}\,dt}{e^{-at}\cdot t^b} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{e^{-at}\,t^b} = \int_0^{+\infty} t^{-b}e^{(a-1)t}\,dt =$

Πρέπει να υπάρχουν τα ολοκληρώματα: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 t^{-b}e^{(a-1)t}\,dt$ και $I_\infty = \displaystyle\int_1^{\infty} t^{-b}e^{(a-1)t}\,dt$

→ Το I_0 υπάρχει για $b<1$. $\left(\dfrac{t^{-b}e^{(a-1)t}}{t^{-b}} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 1\right.$ άρα το I_0 υπάρχει

ανν $\left.\displaystyle\int_0^1 t^{-b}\,dt \text{ υπάρχει δηλ. } b<1\right)$

→ Για το I_∞ αν $a>1$ η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα $\to +\infty$ και συνεπώς το I_∞ δεν υπάρχει.

Αν το $a=1$,

$$I_\infty = \int_1^{\infty} t^{-b}\,dt = +\infty, \text{ επειδή } b<1.$$

Αν $a<1$ τότε η ποσότητα $t^{-b}e^{(a-1)t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} 0$ πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη του t, άρα το I_∞ υπάρχει.

Τελική απάντηση: Το I υπάρχει εφόσον $a<1$ και $b<1$