Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών (συνέχεια)

Πρόταση

Αν έχουμε ότι η $x_n \to x \neq 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.

$\boxed{\text{Προσοχή}}$!! • Αν $x_n \to 0$ γενικά δεν μπορούμε να πούμε κάτι.
• Αν όμως $x_n \to 0$ και $x_n > 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$
• Αν όμως $x_n \to 0$ και $x_n < 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to -\infty$

!! Όμως $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ αλλά $\frac{1}{x_n} = n(-1)^n$ δεν έχει όριο.

Αν $x_n = \frac{1}{n} \overset{>0}{\to} 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} = n \to +\infty$

Από την προηγούμενη φορά είδαμε ότι το γινόμενο συγκλινουσών ακολουθιών πάει στο γινόμενο των ορίων. Οπότε έχω την παρακάτω πρόταση

Πρόταση

Αν $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(y_n \neq 0,\ y \neq 0) \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

Παραδείγματα

$a_n = \frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n-3}$

(Βγάζουμε κοινό παράγοντα)

$$\frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n-3} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} \begin{matrix} \to x_n \\ \to y_n \end{matrix} \longrightarrow \frac{1+0+0}{2+0-0} = \frac{1}{2}$$

→ Πρόταση

Αν $x_n \to x$, $|x_n| \to |x|$

$\boxed{\text{Προσοχή}}$!! Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

π.χ.
$x_n = (-1)^n$, $|x_n| = 1 \to 1$ όμως η x_n δεν συγκλίνει

Όμως αν $x_n \to 0$ τότε $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$.

Ας δούμε ξανά το πηλίκο $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$.

Τι συμβαίνει αν:

π.χ.
$x_n \to 0$, $y_n \to 0$ ή $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$

Τότε έχω απροσδιόριστες μορφές $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \frac{\infty}{0}, \infty-\infty\right)$

Παράδειγμα

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$ $\qquad$ $x_n y_n = n \to +\infty$

$x_n w_n = 15 \to 15$

$y_n = n^2 \to +\infty$ $\qquad$ $y_n z_n = \frac{1}{n} \to 0$

$z_n = \frac{1}{n^3} \to 0$ $\qquad$ $w_n = 15n \to +\infty$

Π.χ.

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $(\infty - \infty$, απροσδιόριστη μορφή$)$

Πολ/ζω και διαιρώ με το $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ (συζυγής ποσότητα)

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0.$$

← δεν είναι απροσδιόριστη μορφή.

Όρια και ανισότητες

Πρόταση

Έστω $x_n \leq y_n$. Τότε:

(i) Αν $x_n \to +\infty \Rightarrow y_n \to +\infty$

(ii) Αν $y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$

(iii) Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y \Rightarrow x \leq y$

!! Ακόμα και αν έχω $x_n < y_n$ $\forall n$, στο όριο μπορεί να έχω $x = y$
Δηλαδή όχι απαραίτητα $x < y$

π.χ.

$x_n = \frac{1}{n} < \frac{2}{n} = y_n$ αλλά $x_n, y_n \to 0$

Πρόταση (κριτήριο παρεμβολής)

Έχω 3 ακολουθίες: $x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n$
Αν $x_n \to \ell$, $z_n \to \ell$ τότε $y_n \to \ell$.

Σημαντική συνέπεια:

Αν έχω $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ με $|x_n| < M$ (φραγμένη) και $y_n \to 0$.
Τότε:

$$x_n y_n \to 0$$

Απόδειξη

Έχω ότι:

$$\underbrace{-M|y_n|}_{\to 0} \le |x_n||y_n| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \le \underbrace{M|y_n|}_{\to 0}$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής:

$$|x_n y_n| \to 0 \Rightarrow x_n y_n \to 0$$

Παραδείγματα:

- $x_n = \dfrac{\sin n}{n} = \underbrace{\sin n}_{\text{φραγμένη}} \cdot \dfrac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}} \longrightarrow 0$

- $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{φραγμένη}} \cdot \dfrac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}} \longrightarrow 0$

Άσκηση

Μελετήστε ως προς την σύγκλιση.

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+(n-1)} + \frac{n}{n^2+n}$$

Λύση

$\boxed{\text{Λάθος σκέψη}}$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2\frac{1}{n}}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 0 \quad (\text{σωστό})$$

Γενικά:

$$\frac{n}{n^2+k} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow 0 \quad (\text{σωστό}) \quad (k=1,2,3,\dots,n)$$

Άρα $x_n \to 0$ (ως άθροισμα μηδενικών ακολουθιών)

Λάθος!!

→!! Το λάθος είναι ότι καθώς $n \to +\infty$ έχω άπειρους όρους δηλ. "προσθέτω άπειρα μηδενικά" και δεν ισχύει ο κανόνας της πρόσθεσης.
(δηλ. κρύβεται μία απροσδιοριστία τύπου $0 \cdot \infty$)

$\boxed{\text{Σωστός τρόπος}}$

Κάνω κριτήριο παρεμβολής.

$$\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}, \quad k=1,2,3,\dots,n$$

Συνεπώς $n\,\dfrac{n}{n^2+n} \le x_n \le n\,\dfrac{n}{n^2+1}$ (πλήθος όρων)

δηλ. $\underbrace{\dfrac{n^2}{n^2+n}}_{\to 1} \le x_n \le \underbrace{\dfrac{n^2}{n^2+1}}_{\to 1} \longrightarrow x_n \to 1$

↳ από κριτήριο παρεμβολής.

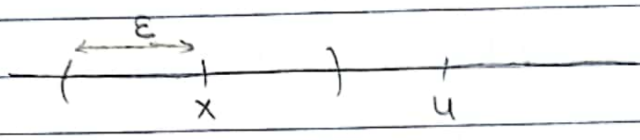
Πρόταση

Αν $\lim x_n < u$, τότε $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$, τ.ω.:

γνήσια

$$x_n < u \quad , \forall\, n > \bar{n}.$$

Διαισθητικά: Έστω $\lim x_n = x$.



Απόδειξη

Έστω $x_n \to x < u$. Επιλέγω $\varepsilon = u - x > 0$. Τότε από τον ορισμό της σύγκλισης, έχω ότι $\exists\, n_0$ τ.ω.

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad , \forall\, n \geq n_0$$

$$\Rightarrow x_n - x < \varepsilon \Rightarrow x_n < x + \varepsilon = x + (u - x) = u \quad , \text{ για } n \geq \bar{n} = n_0$$

Παρατήρηση

Αν $\lim x_n = u$ δεν ισχύει.

π.χ. $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ (πάντα υπάρχουν αρνητικοί και θετικοί όροι).

Χρήσιμα όρια

• Ανισότητα Bernoulli:

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \; x \geq -1$: $\boxed{(1+x)^n \geq nx + 1}$

(η ισότητα ισχύει αν $x=0$ ή $n=1$)

Απόδειξη

Με επαγωγή:

Για $n=1$ έχω ότι:

$$1+x \geq 1+x \quad \checkmark$$

Δέχομαι ότι ισχύει για $n=k$:

$$(1+x)^k \geq kx+1$$

πολ/ζω με $(1+x) \Rightarrow$

$$(1+x)^{k+1} \geq (kx+1)(1+x) = kx + kx^2 + 1 + x$$
$$= (k+1)x + 1 + kx^2 > 0$$
$$> (k+1)x + 1 \quad \checkmark$$

1) a^n (i) Αν $a>1$, $a^n = (\underbrace{a-1}_{*}+1)^n \geq n(a-1)+1 \to +\infty$ Bernoulli

$\Rightarrow a^n \to +\infty$.

(ii) $0<|a|<1$, $\frac{1}{|a|} > 1$. Από την (i) $\frac{1}{|a|^n} \to +\infty$

$\Rightarrow |a|^n \to 0$.

(iii) Αν $a<-1$ η a^n δεν συγκλίνει.

γιατί:

$$\left(\begin{array}{l} a^{2k} \to +\infty \\ a^{2k+1} \to -\infty \end{array} \right)$$

Παράδειγμα

Βρείτε το όριο $x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{3}\right)^n$

Λύση

$$0 \leftarrow 0 \leq x_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$$

Επειδή το $\frac{5}{6} < 1$, η $\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$.

Συνολικά η $x_n \to 0$.

2) $a > 0$, τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$

Απόδειξη

Έστω $a > 1$ τότε $\sqrt[n]{a} > 1$.

Άρα,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n$$

θετικοί αριθμοί.

$$\Rightarrow a = (1+\theta_n)^n = 1 + n\theta_n + (\text{θετικοί όροι}) \Rightarrow$$

Υπενθύμιση

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

Άρα $(1+\theta_n)^n = 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 + \dots$

$$\Rightarrow \quad a = (1+\theta_n)^n > 1 + n\theta_n$$

Δηλαδή: $\quad n\theta_n < a-1$.

Τότε όμως,

$$0 < \theta_n < \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Άρα $\theta_n \to 0$. αυτό σημαίνει ότι:

$$\sqrt[n]{a} = 1+\theta_n \to 1$$

Αν $0<a<1$, τότε:

$$\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1.$$

3) $\sqrt[n]{n} \to 1$

Απόδειξη

θετικοί όροι

$$\sqrt[n]{n} = 1+\theta_n \Rightarrow n = (1+\theta_n)^n = 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 + \dots$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\theta_n < n \Rightarrow 0 < \theta_n < \frac{2}{n-1} \to 0$$

$$\Rightarrow \theta_n \to 0$$

Άρα $\sqrt[n]{n} \to 1$

4) $a>1$, $b>0$ τότε $x_n = \dfrac{a^n}{n^b} \to +\infty$ ("Εκθετικό" "Δύναμη")

Απόδειξη

Έστω $0<b<1$ και $a^n = (a-1+1)^n \geq (a-1)n+1$

Οπότε:

$$x_n \geq \frac{(a-1)n+1}{n^b} > \frac{(a-1)n}{n^b} = (a-1)n^{1-b>0} \to +\infty$$

Επομένως,

$$x_n \to +\infty$$

Αν $b>1$: Διαλέγω $k>1$ τ.ω. $\dfrac{b}{k}<1$,

προφανώς έχω ότι:

$$a^{1/k}>1.$$

Εφαρμόζω το προηγούμενο αποτέλεσμα με $a^{1/k}>1$ και $\dfrac{b}{k}<1$.

Έχω ότι:

$$\frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n^{\frac{b}{k}}} \to +\infty$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{a^n}{n^b}\right)^{\frac{1}{k}} \to +\infty.$$

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο.

(i) Αν x_n αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε $x_n \to +\infty$.

(ii) Αν x_n αύξουσα και φραγμένη τότε $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

(iii) Αν x_n φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε $x_n \to -\infty$.

(iv) Αν x_n φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

Άσκηση

Έστω $x_1 = x_2 = 1$ και $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$.

Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση.

Λύση

Χρησιμοποιώ επαγωγή (εύκολο) και βρίσκω ότι $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Από τον τύπο έχω ότι:

$$\frac{1}{x_{n+2}} > \frac{1}{x_{n+1}} \iff x_{n+1} > x_{n+2}$$

Άρα η x_n είναι φθίνουσα.
Η x_n έχει κάτω φράγμα το 0. Άρα (από την πρόταση) η x_n συγκλίνει, $x_n \to \ell \geq 0$
(διότι όλοι οι όροι είναι θετικοί)

Αν $x_n \to \ell$, τότε $x_{n+1} \to \ell$ και $x_{n+2} \to \ell$.

Έστω ότι $\ell \neq 0$. Τότε από την $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$ για $n \to +\infty$

έχω ότι: $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \frac{1}{\ell} = 0$ Άτοπο!

Άρα οπωσδήποτε $\ell = 0$!

Τελικά $x_n \to 0$.