Πολύ σημαντική ακολουθία

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Η a_n είναι γνήσια αύξουσα και είναι και άνω φραγμένη.

Θα δείξω ότι είναι αύξουσα:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+1} < \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \quad (1)$$

Όμως $\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$

από Bernoulli:

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} > 1-\frac{n+1}{\underbrace{n^2+2n+1}_{(n+1)^2}} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Άρα απέδειξα την (1) και συνεπώς η a_n είναι αύξουσα.

Θα δείξω ότι είναι άνω φραγμένη:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n = \left(1 - \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n$$

από Bernoulli:

$$\left(1-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq 1 - n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 - n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= 1-\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 1-\sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1-\cancel{\sqrt{n}}\,\frac{1}{2\cancel{\sqrt{n}}}$$

Οπότε $1-\sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Δηλαδή έχω ότι:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n > \frac{1}{2} \iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} > \frac{1}{2} \iff$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < 2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 4$$

Άρα $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$

Συνεπώς η a_n συγκλίνει.

Αποδεικνύεται ότι η $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

Ασκήσεις

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}}_{\to 1} \to e$

2) $\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}}_{\to 1} \to e$

3) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} \overset{(*)}{=}$ $\quad (*)\ \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1+\frac{1}{n-1}$

$= \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}_{\to e}} \to \frac{1}{e} = e^{-1}$

Συναρτήσεις (από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, δηλ. πραγματικές)

→ $f: \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \to \underset{y=f(x)}{B \subset \mathbb{R}}$, απεικόνιση

- x: ανεξάρτητη μεταβλητή
- y: εξαρτημένη -\|-
- A: πεδίο ορισμού
- B: σύνολο τιμών

Συνήθως μας δίνεται το A.
Αν δεν μας δίνεται το A τότε το "βρίσκω" μελετώντας τον τύπο της $f(x)$.

Π.χ.

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, τότε το $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (μηδενισμός παρονομαστή) έστω και αν δεν δίνεται ξεκάθαρα

Π.χ.

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$, $A = \{x \in \mathbb{R},\ x > 1\}$

Π.χ.

Ο τύπος $y^2 = x^3$ ορίζει συνάρτηση?

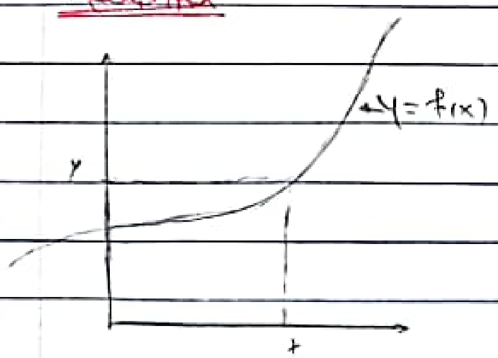
Όχι, γιατί δεν είναι ξεκάθαρο τι εννοεί!

- αν $x<0$, δεν έχει νόημα.
- αν $x>0$, τότε $y=\sqrt{x^3}$ ή $y=-\sqrt{x^3}$, άρα δεν είναι ξεκάθαρο τι είναι το y.

Επίσης μπορεί:

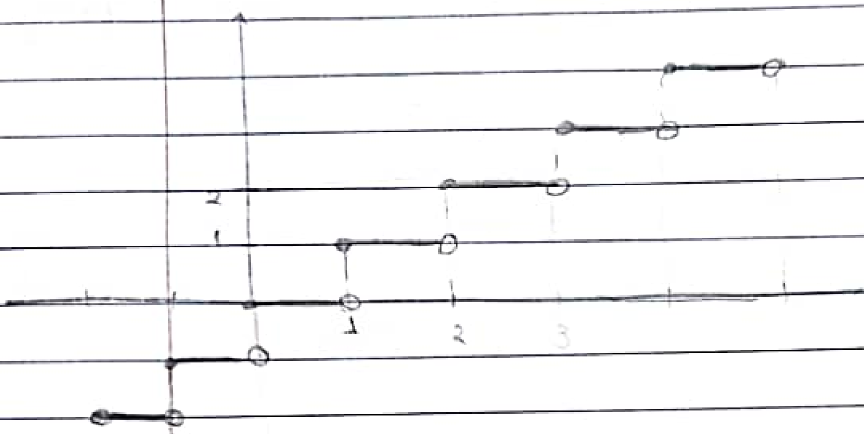
$$y = \begin{cases} \sqrt{x^3}, & 0<x<15 \text{ (τυχαίο)} \\ -\sqrt{x^3}, & x \geq 15 \end{cases}$$

Γραφήματα



π.χ.

$y=[x]$, $x\in\mathbb{R}$.



Ορισμός

- Η f είναι αύξουσα αν:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

και > γνησίως αύξουσα

- Η f είναι φθίνουσα αν:

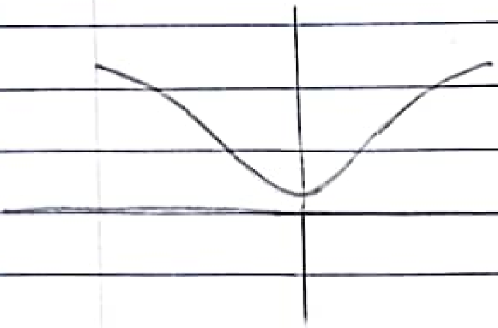
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

και < γνησίως φθίνουσα

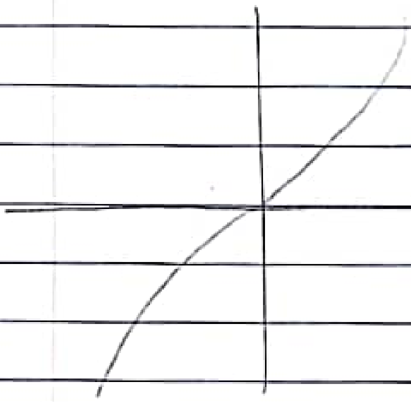
- f μονότονη ή γνήσια μονότονη.

Ορισμός

- Η f είναι άρτια αν $f(x) = f(-x)$
- Η f είναι περιττή αν $f(x) = -f(-x)$



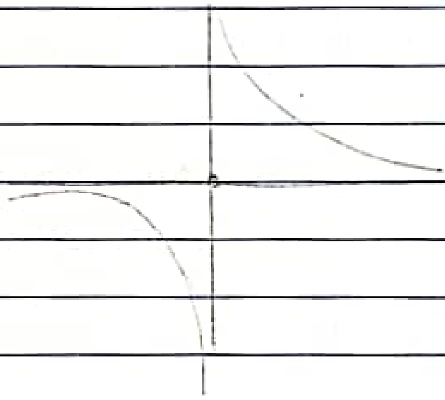
← f άρτια, συμμετρική ως προς y-άξονα



← f περιττή, συμμετρική ως προς το (0,0)

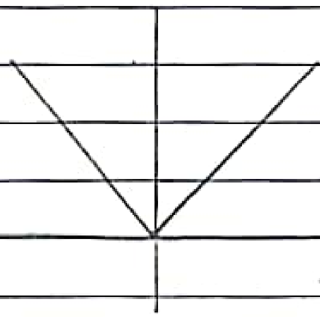
Π.χ.

Η $y = \frac{1}{x}$ έχει δύο κλάδους και είναι και περιττή.



Π.χ.

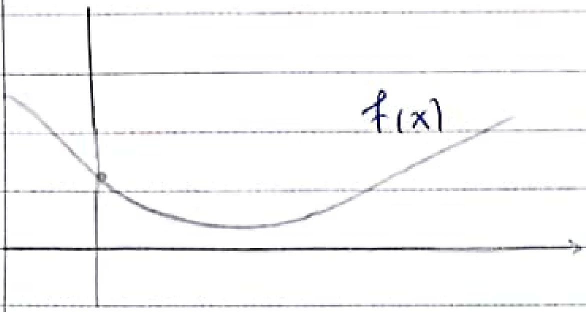
Η $y = |x|$ είναι άρτια.



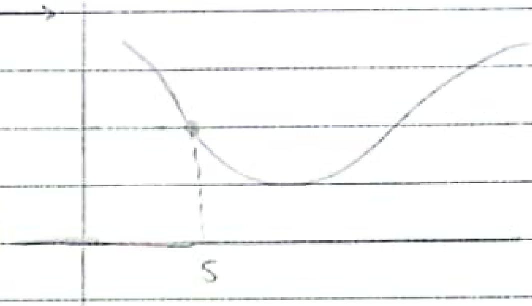
Ορισμός

- Αν $f(x) \geq l \ \forall x \in A$ η f είναι κάτω φραγμένη.
- Αν $f(x) \leq u \ \forall x \in A$ η f είναι άνω φραγμένη.

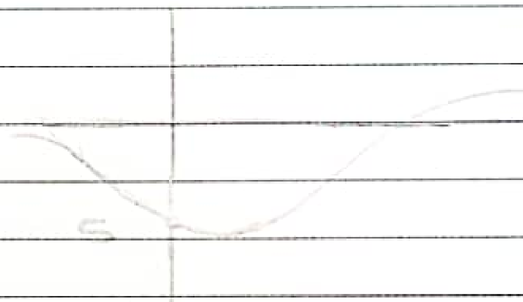
Π.χ.

• 

• $f(x-5)$:
δεξιά μετατόπιση της $f(x)$
κατά 5 μονάδες.

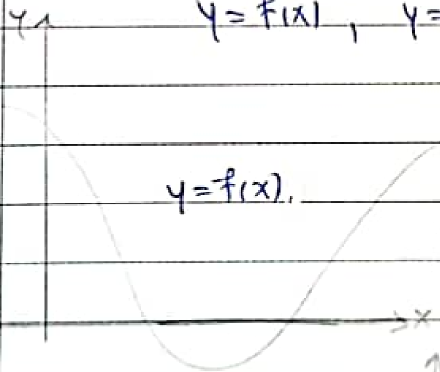


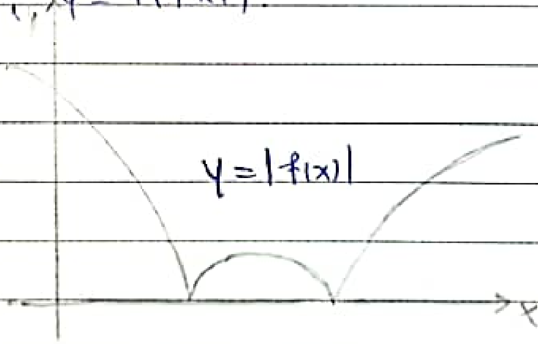
• $f(x)-5$:
μετατόπιση προς τα
κάτω κατά 5 μονάδες.

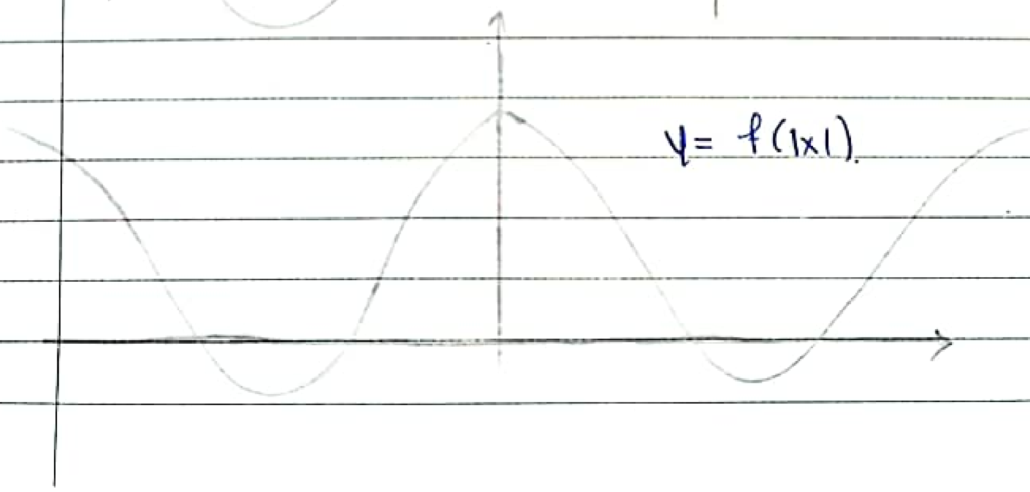


Άσκηση

Συσχετίστε τα γραφήματα των συναρτήσεων:
$y=f(x)$, $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$.







Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός

Η $f: A \to B$

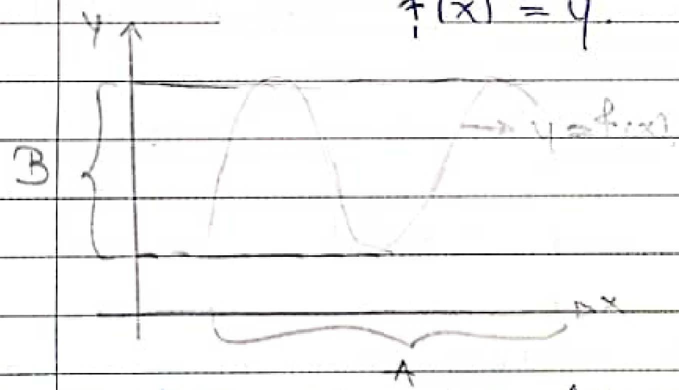
(i) Η f είναι 1-1 (ένα προς ένα) αν $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

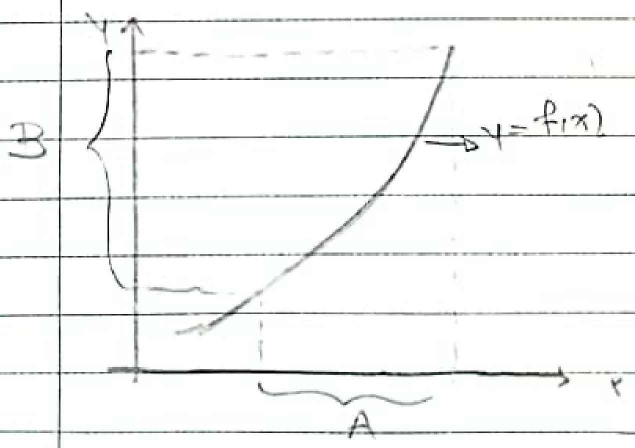
!! (δεν μπορούν 2 διαφορετικά σημεία να έχουν την ίδια εικόνα)

(ii) Η f είναι επί του B, αν $\forall\ y \in B$, $\exists\ x \in A$ με:

$$f(x) = y.$$



Η f δεν είναι 1-1 ($f: A \to B$)
Η f είναι επί του B



Η f είναι 1-1
και επί

Αν η $f: A \to B$ είναι 1-1 και επί τότε ορίζω $\forall\, y \in B$, ένα μοναδικό $x \in A$ τ.ω. :

$$f(x) = y.$$

Άρα έχω μία νέα συνάρτηση : $B \to A$, την αντίστροφη συνάρτηση της f:

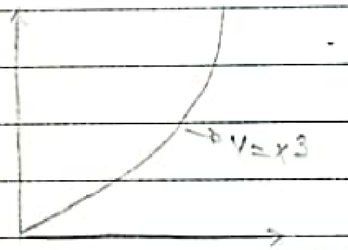
$$f^{-1}: B \to A, \quad x = f^{-1}(A)$$

Συνήθως γράφω $y = f^{-1}(x)$

Π.χ.

$$y = f(x) = x^3, \quad A = [0, +\infty) \to B = [0, +\infty)$$

Η f είναι 1-1 και επί, άρα αντιστρέφω.



Αν $y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3} = f^{-1}(y)$

Λέω ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι:

$$y = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

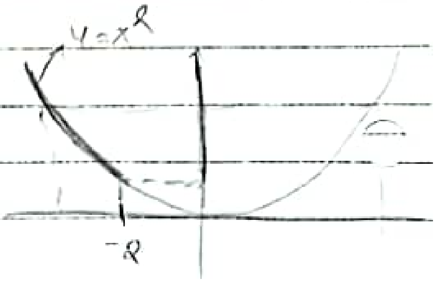
Πρόταση

Αν η f είναι γνήσια μονότονη, τότε αντιστρέφεται.

Π.χ.

$y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

Σε όλο το $\mathbb{R}$ δεν είναι 1-1, άρα δεν αντιστρέφεται.

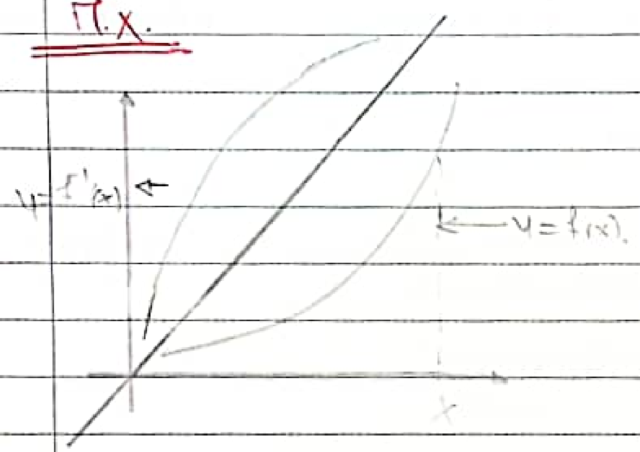


Αν όμως την περιορίσω π.χ. $(-\infty,-2]$ τότε είναι 1-1
και επί $\underbrace{(-\infty,-2]}_{A} \to \underbrace{[4,+\infty)}_{B}$, άρα αντιστρέφεται:

$$x^2 = y \Rightarrow x = -\sqrt{y}.$$

ή γράφω: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad : B \to A$.

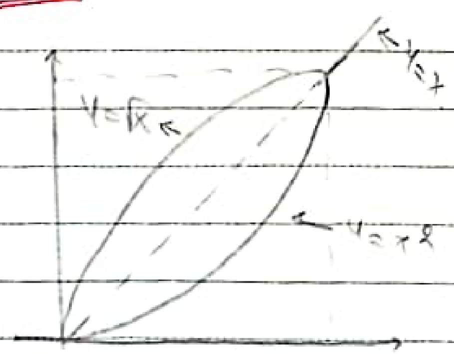
Π.χ.



- Η f είναι μονότονη, άρα αντιστρέφεται.
- Γράφημα της f: $(x, y=f(x))$
- Γράφημα της f^{-1}: $(y=f(x), x)$

Άρα το γράφημα της αντιστρόφου είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο $(y=x)$.

Π.χ.



Αν $y=x^2$
τότε:
$x \geq 0$, η αντίστροφη είναι:
$y=\sqrt{x}$.

Πρόταση

Είδαμε ότι αν f γνήσια μονότονη αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία με την f.

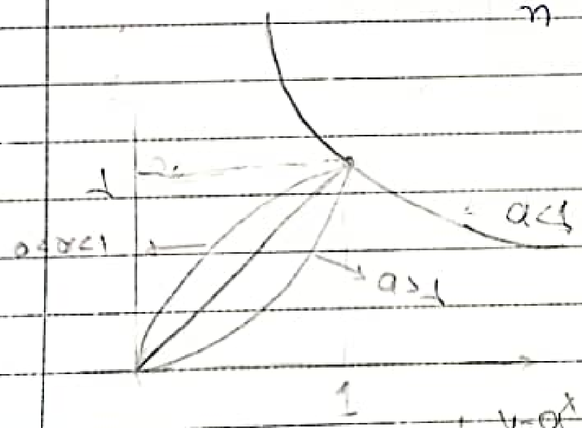
Συναρτήσεις

- Πολυωνυμικές: $f(x)=a_\nu x^\nu + \dots + a_2x^2+a_1x+a_0$, $x\in\mathbb{R}$
- Ρητές: πηλίκο 2 πολυωνυμικών.
- Λογαριθμικές
- Εκθετικές
- Δυνάμεις
- Τριγωνομετρικές

Π.χ.

→ Δυνάμεις: $y=x^a$, $x\in[0,+\infty)$, αν $a>0$

ή $x\in(0,+\infty)$, αν $a<0$

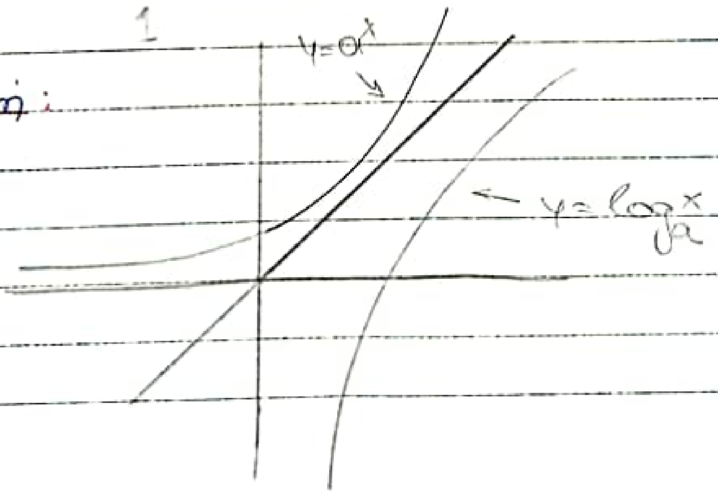


→ Εκθετική:

$y=a^x$

$a>1$

$x\in(-\infty,+\infty)$



Σαρώθηκε με το CamScanner

Άσκηση

Βρείτε το πεδίο ορισμού:

(i) $(1-x)^{\sqrt{2}}$, (ii) $x^{-\sqrt{2}}$, (iii) $\log \frac{x-1}{x+1}$

Λύση

(i) Πρέπει $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$

Άρα $A = (-\infty, 1]$

(ii) Πρέπει $x>0$, $A = (0, +\infty)$

(iii) Πρέπει $\frac{x-1}{x+1} > 0 \iff (x-1)(x+1)>0$

Είτε $x<-1$ είτε $x>1$

Άρα

$A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

→ **Τριγωνομετρικές:**

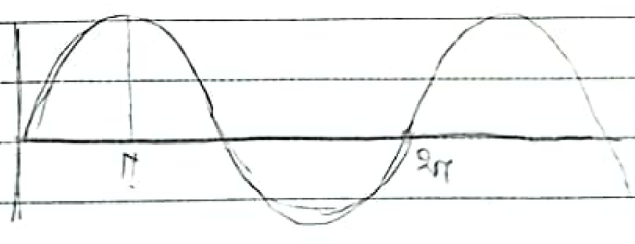
$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

Ορισμός

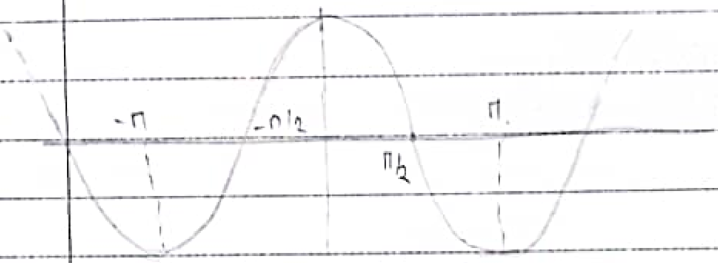
Η f είναι περιοδική αν $\exists\ T>0$ τ.ω. $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in A$.

π.χ.

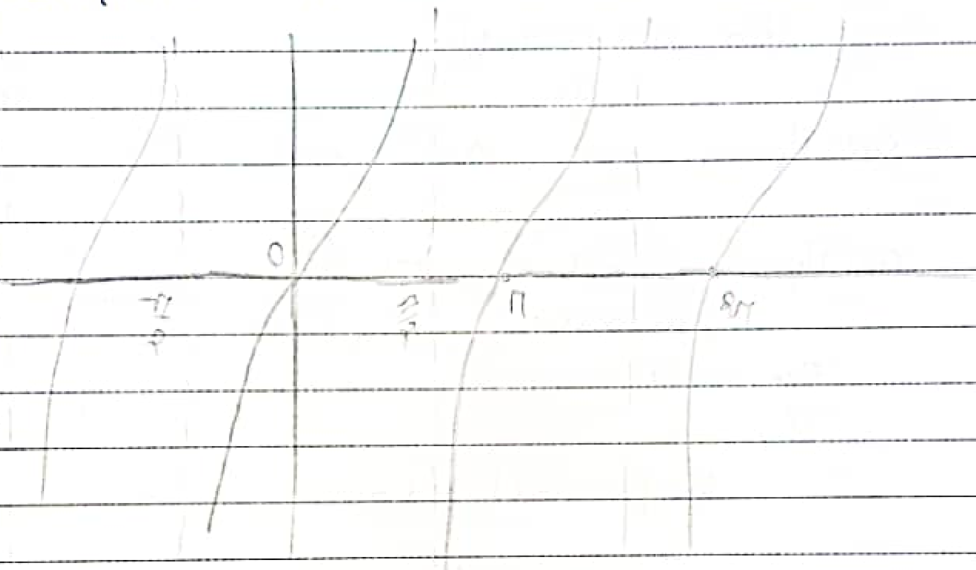
$\sin(x+2\pi) = \sin x$.



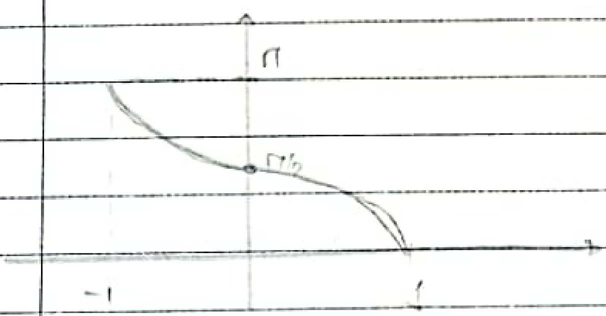
$\cos(x+2\pi) = \cos x$



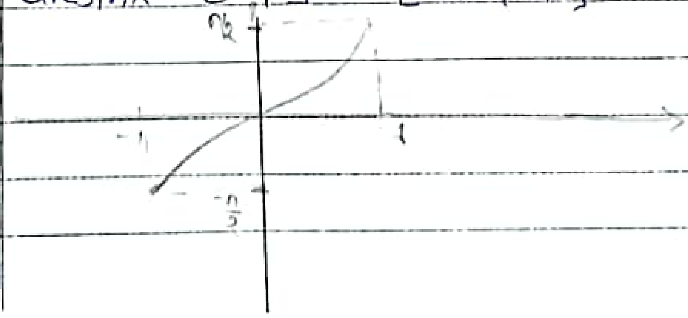
$\tan(x+\pi) = \tan x$



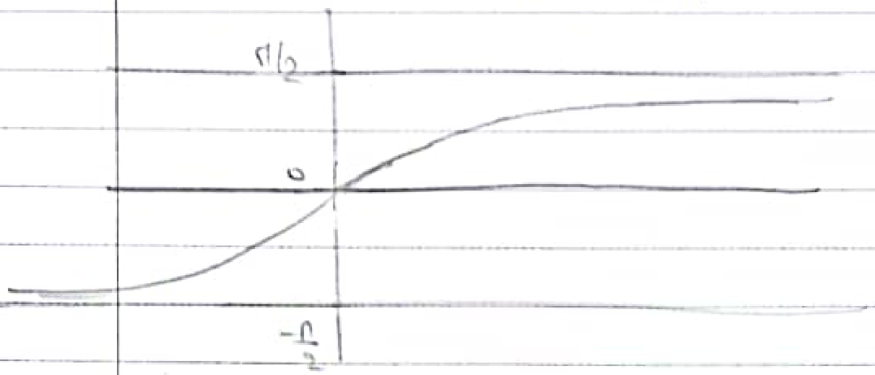
$\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$



$\arcsin x : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$



arctan : $(-\infty,+\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



Άσκηση

Βρείτε πεδίο ορισμού των:

(i) $\sqrt{\sin x}$ (ii) $\arcsin\frac{x}{x-1}$

Λύση

(i) Πρέπει: $\sin x \geq 0$, $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$

Πεδίο τιμών $B=[0,1]$

(ii) Πρέπει: $-1\le \frac{x}{x-1}\le 1 \Leftrightarrow$ (Εδώ ορίζεται το arcsin)

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|\le 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-1)^2}\le 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2\le (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2\le x^2-2x+1 \Leftrightarrow$$

$$2x\le 1\Leftrightarrow x\le \frac{1}{2}$$ Άρα $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$