Όρια συναρτήσεων

Ορισμός

$A \subseteq \mathbb{R}$. Το ξ είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του A, αν $\forall\, \delta > 0$ $\exists$ $x \in A$ τ.ω.:

$$0 < |x - \xi| < \delta$$

"δηλ. το ξ είναι όσο κοντά θέλω σε σημεία του A"

π.χ.

$\lim_{x \to -1} \sqrt{x}$ (το -1 δεν είναι στο πεδίο ορισμού ούτε καν κοντά!)

δεν έχει νόημα.

$A = [0, +\infty)$.

π.χ.

Αν $A = (0, 1]$ τότε το $\xi = 1$ είναι σ.σ. ενώ $1 \notin A$.

το $\xi = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ είναι σ.σ.

→ Το ξ είναι σ.σ. από τα δεξιά αν:

$$\xi < x < \xi + \delta.$$

→ Το ξ είναι σ.σ. από τα αριστερά αν:

$$\xi - \delta < x < \xi$$

Ορισμός

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και ξ σ.σ. του A. Η f συγκλίνει (τείνει, Έχει όριο η καθώς $x \to \xi$ (ξ^+, ξ^-) στο $x \in \mathbb{R}$ και γράφω:

$$\boxed{\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta}$$

Αν $\forall \, \varepsilon > 0, \exists \, \delta > 0$ τ.ω.:

$$|f(x) - \eta| < \varepsilon \quad \forall \; \overset{\text{γνήσια}}{0 <} |x - \xi| < \delta, \; x \in A.$$

$$\left(\begin{array}{ll} 0 < x - \xi < \delta & \text{για } \xi^+ \\ 0 < \xi - x < \delta & \text{για } \xi^- \end{array} \right)$$

→ Η γνήσια ανισότητα απαγορεύει στο x να πάρει την τιμή ξ.

Παραδείγματα:

1) $f(x) = 3x + 1$, $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

απόδ.

Έστω $\varepsilon > 0$. $|f(x) - 7| = |3x + 1 - 7| = 3|x - 2|$

Αν επιλέξω $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, τότε $3|x - 2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Άρα $\forall \, x$ τ.ω.:

$|x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ έχω ότι $|f(x) - 7| < \varepsilon$.

2) $f(x) = x^2$, $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$

απόδ.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχω $|f(x)-4| = |x^2-4| = |x-2||x+2|$

Ας υποθέσω ότι $|x-2|<1$. (δηλ. υποθέτω ότι το δ που ψάχνω θα είναι ≤ 1).

$$|x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Τότε όμως $|x+2| = x+2 < 5$

Συνεπώς, το $|f(x)-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2|$.

Επιλέγω $\delta' = \frac{\varepsilon}{5}$, οπότε για:

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ (και ≤ 1) έχω ότι $|f(x)-4| < \varepsilon$.

Άρα θέλω ταυτόχρονα:

$|x-2|<1$ και $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$

Άρα διαλέγω $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$

Πρόταση

Έστω ξ εσωτερικό σημείο στο A. Τότε:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \underset{\text{αν και μόνο αν}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to\xi^+} f(x) = \lim_{x\to\xi^-} f(x) = \eta.$$

Παραδείγματα

Μελετήστε το όριο: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης.

Άρα: $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ (x>0)}} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Όμοια: $\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ (x<0)}} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Πρόταση

Αν $\lim\limits_{x\to \xi} f(x) = 0$ και $g(x)$ φραγμένη στο $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ για κάποιο $\delta>0$ δηλ.

$$|g(x)|<M.$$

Τότε:

$$\lim_{x\to \xi} f(x)g(x) = 0.$$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$, τότε: $|f(x)g(x)-0| = |f(x)g(x)| < M|f(x)|$.

Επειδή το $\lim\limits_{x\to \xi} f(x)=0$ για $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$,

$\exists\ \delta'$ τ.ω:

$$|x-\xi|<\delta' \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Άρα για $|x-\xi|<\delta_2 = \min(\delta', \delta)$ έχω ότι:

$$|f(x)g(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Συνεπώς: $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = 0$.

Ορισμός

- ($\xi\in\mathbb{R}$) $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \iff \forall\, M>0,\ \exists\, \delta>0$ τ.ω.:

$$0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow f(x)>M$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, M>0\ \exists\, k>0$ τ.ω.:
  όταν $x<-k \Rightarrow f(x)>M$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, M>0\ \exists\, k>0$ τ.ω.:
  όταν $x>k \rightarrow f(x)>M$.

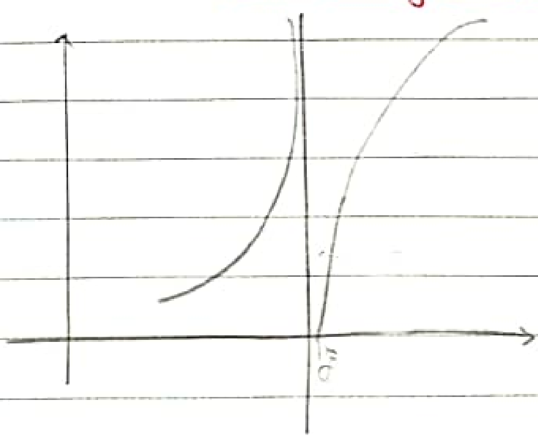
π.χ.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

αποδ.

Έστω $M>0$, θέλω $f(x)=x^2>M \iff x>\sqrt{M}$
Αρκεί να πάρω $k=\sqrt{M}$.

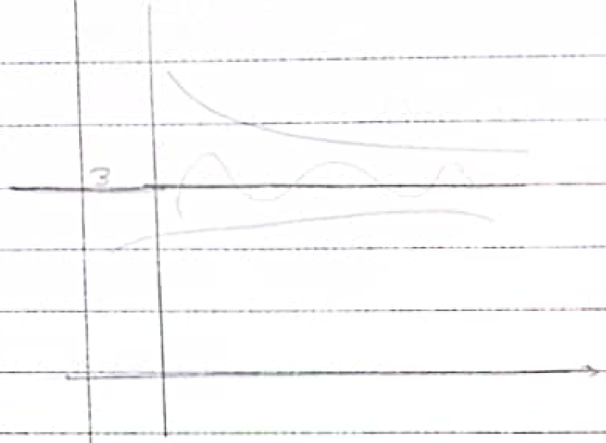
Όρια και γράφημα



$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = +\infty$.

$x=\xi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = +\infty$.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3.$

$y=3$ οριζόντια ασύμπτωτη

Ορισμός

Η ευθεία ℓ με εξίσωση $y=\mu x+\nu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ (ή $-\infty$) αν:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left(f(x)-\mu x-\nu\right)=0$$

Παράδειγμα

Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=x-1$.

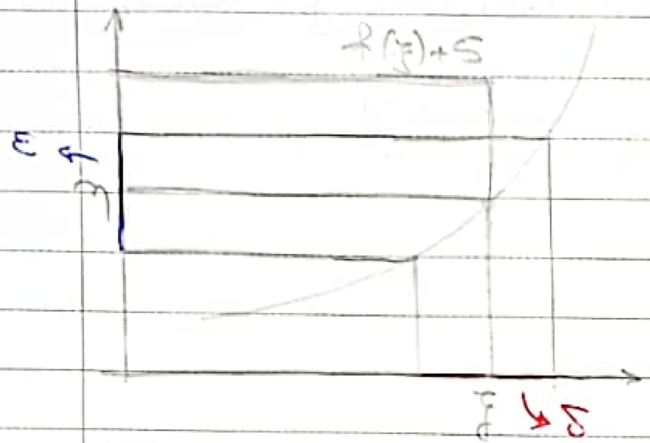
αποδ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-(x^2-1)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

Ορισμός ορίου

$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta>0$ τ.ω.:
$0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-\eta|<\varepsilon$



Όταν το x είναι στην κόκκινη περιοχή αλλά $x\neq\xi$ τότε η f(x) είναι στην μπλε περιοχή.

Τώρα αλλάζω λίγο την συνάρτηση:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x\neq\xi \\ f(\xi)+5, & x=\xi \end{cases}$$

Ερώτηση
Ποιο είναι το $\lim_{x\to\xi} \bar{f}(x)$?

Επειδή στον ορισμό του ορίου έχω: $0<|x-\xi|$ (άρα δεν μπορεί $x=\xi$) το όριο είναι όπως και πριν, δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi} \bar{f}(x) = \eta (= f(\xi))$$

Αν στον ορισμό του ορίου δεν είχα την $0<|x-\xi|$ τότε το όριο δεν θα υπήρχε!

Ιδιότητες ορίων (Παρόμοιες με ακολουθίες)

Συμβολισμός: Γράφω $\lim_x f(x)$ και εννοώ ένα από τα $\lim_{x\to \xi \in \mathbb{R}} f(x)$ ή $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ή $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

→ $\lim_x f(x) = \eta$ τότε $\lim_x (-f(x)) = -\eta$

→ $\lim_x f(x) = \eta$ και $\lim_x g(x) = \zeta$ τότε:

$$\lim_x (f(x) \pm g(x)) = \eta \pm \zeta$$

→ Κανόνας αντιστρόφου:

$$f(x) \xrightarrow[x\to\xi]{} \eta \neq 0$$

$f(x) \neq 0$ για x κοντά στο ξ. Τότε: $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to\xi]{} \frac{1}{\eta}$

Ορισμός

Λέμε ότι η $f(x)$ έχει κάποια ιδιότητα για x κοντά στο ξ αν $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. η f έχει αυτή την ιδιότητα όταν $x \in (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$.

Αντίστοιχος ορισμός όταν στη θέση του ξ έχω $+\infty$ ή $-\infty$.

π.χ.

Η $f(x)$ είναι θετική για x κοντά στο $-\infty$.

Δηλαδή:

$\exists\, M > 0$ τ.ω. όταν $x < -M$ η $f(x)$ είναι θετική.

→ Αν $\lim_x f(x) = \eta$ και $\lim_x g(x) = \zeta$.

τότε:

$$\lim_x (f(x) \cdot g(x)) = \eta \zeta$$

→ $\lim_x \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\zeta}{\eta}$ $(\eta \neq 0,\ f(x) \neq 0$ κοντά στο $x = \xi)$

Προσοχή στις απροσδιόριστες μορφές:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot (-\infty)$.

π.χ.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \longrightarrow 0$$

Πρόταση

$$\lim_{x} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Αν $\lim_{x} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο όριο του x, τότε:

$$\lim_{x} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Αν $\lim_{x} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο όριο του x, τότε:

$$\lim_{x} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Πρόταση

Αν η $f(x)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη $y = \mu x + \nu$ καθώς $x \to +\infty$, βρείτε τα μ, ν.

Λύση

Έχω ότι $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \mu\nu) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - \mu x - \nu}{x} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\mu + \frac{\nu}{x}\right) = \mu$$

Δηλαδή: $\boxed{\mu = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}$

και:

$$\boxed{\nu = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \mu x)}$$

Πρόταση:

Αν $\lim_{x} f(x) = \eta$ τότε $\lim_{x} |f(x)| = |\eta|$

Κανόνας αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής

Έστω $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$.

Αν $\lim_{x} f(x) = \eta$ και $f(x) \neq \eta$ για x κοντά στο όριο της x και υπάρχει το $\lim_{y\to\eta} g(y)$ τότε:

$$\lim_{x} g(f(x)) = \lim_{y\to\eta} g(y)$$

Π.χ.

Βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{(\sqrt{x}+3)^3+4}$$

Η $f(x) = \sqrt{x}+3$ και $g(y) = \frac{y^2}{y^3+4}$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (\sqrt{x}+3) = 3 \ (=\eta)$$

Οπότε αρκεί να υπολογίσω το $\lim_{y\to 3} \frac{y^2}{y^3+4} = \frac{9}{31}$

Χρήσιμες Περιπτώσεις

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to +\infty} g(y)$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{y\to +\infty} g(-y)$

Όρια και ανισότητες

Πρόταση

Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο $x = \xi$, τότε $\lim_x f(x) \leq \lim_x g(x)$

Οπότε: (i) αν $\lim_x f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_x g(x) = +\infty$

(ii) αν $\lim_x g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_x f(x) = -\infty$.

Π.χ.

Βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Για $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + x > \frac{1}{2}$

Άρα $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1+x) > \frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $\lim_x f(x) = \lim_x h(x) = p$ και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για x κοντά στο όριο του x, τότε:

$$\lim_x g(x) = p.$$

Π.χ.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{[x]}{x}$ $\qquad [x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x-1 < [x] \leq x \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} < 1$$

δηλ. $$1 - \frac{1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq 1$$

Για $x \to +\infty \Rightarrow \dfrac{[x]}{x} \to 1$