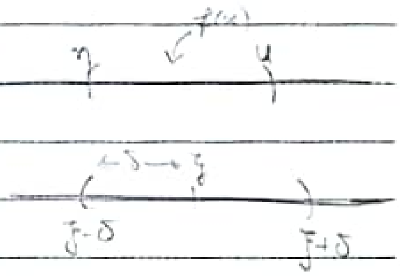
Πρόταση (γνήσια ανισότητα)

Αν $\lim_x f(x) < u$ τότε $f(x) < u$ για x κοντά στο όριο του x.
Όμοια αν $\lim_x f(x) > \ell$ τότε $f(x) > \ell$ για x κοντά στο όριο του x.

Απόδειξη



Όταν $x \to \xi$ (παρόμοια αν $x \to \pm\infty$)
Έστω ότι $\lim_{x\to\xi} = \eta \le u$.

Έστω $\varepsilon = u - \eta$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.:

$$|x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \eta| < \varepsilon$$

δηλαδή:

$$f(x) - \eta < \varepsilon \Rightarrow f(x) < \varepsilon + \eta = u - \eta + \eta = u.$$

Άσκηση

Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για $|x-1| < \delta$ να ισχύει:

$$f(x) = \frac{x^7 + 16x^5 + 14}{x^8 + 50x^7 + 9} > \frac{1}{2}$$

Λύση

Είναι αδύνατο να λύσουμε την ανισότητα!
Υπολογίζω το $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1+16+14}{1+50+9} = \frac{31}{60} > \frac{1}{2}$

Από την προηγούμενη πρόταση $\exists\ \delta > 0$ τ.ω. η ανισότητα ισχύει για $0 < |x-1| < \delta$.

Συνέπεια

Αν $\lim_x f(x) = \eta \in \mathbb{R}$ (δηλ. είναι αριθμός) τότε η f κοντά στα όρια του x είναι φραγμένη.

Σαρώθηκε με το CamScanner

Άσκηση

Έστω $f(\sqrt{x}) = -f^2(x)+2$, $\forall x>1$

(i) Αν το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός, βρείτε το.

(ii) Δείξτε ότι δεν μπορεί $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Λύση

(i) Έχω ότι $\lim_{x\to+\infty} f(\sqrt{x}) = \lim_{y\to+\infty} f(y)=\ell$ $\left[\text{διότι } x\to+\infty \Rightarrow \sqrt{x}\to+\infty\right]$

Άρα παίρνοντας τα όρια $x\to+\infty$, στην σχέση $f(\sqrt{x})=-f^2(x)+2$ έχω ότι: $\ell=-\ell^2+2 \Leftrightarrow \ell^2+\ell-2=0 \Leftrightarrow (\ell+2)(\ell-1)=0 \Leftrightarrow$

άρα $\ell=-2$ ή $\ell=1$

(ii) Αν $f(x)\to+\infty \Rightarrow f(\sqrt{x})\to+\infty$ $(x\to+\infty)$

και $f^2(x)\to+\infty$

Τότε όμως $\underbrace{f(\sqrt{x})}_{+\infty} = \underbrace{-f^2(x)+2}_{-\infty}$ Άτοπο.

Πρόταση

$f: A\to\mathbb{R}$ και έστω (x_n) ακολουθία με $x_n\in A$ και $x_n\neq\xi$ και

$x_n\to\xi$ (από κάποιο δείκτη n_0 και μετά) Τότε αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$

$\begin{pmatrix}\eta\in\mathbb{R}\\ \text{ή } \pm\infty\end{pmatrix}$ τότε $\lim_{x\to\xi} f(x_n) = \lim_{x\to\xi} f(x)$

Απόδειξη

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta\in\mathbb{R}$ και έστω $x_n\to\xi$ και $x_n\neq\xi$.

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο.

Επειδή η συνάρτηση έχει όριο, υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.:
όταν $0<|x-\xi|<\delta$ και $x\in A$ τότε $|f(x)-\eta|<\varepsilon$.
Επειδή $x_n\to\xi$, με την χρήση του ορισμού επιλέγω:
$\varepsilon'=\delta$, $\exists\, n_0$ τ.ω. για $n\geq n_0$ το $|x_n-\xi|<\delta\,(\varepsilon')$
Τότε όμως έχω ότι για $n\geq n_0$, $0<|x_n-\xi|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x_n)-\eta|<\varepsilon$.

Δηλαδή τελικά για το τυχαίο $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0$ τ.ω. για $n\geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x_n)-\eta|<\varepsilon$.

Συνεπώς $f(x_n)\to\eta$.

Παραδείγματα:

1) $f(x)=x^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$.

2) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\underbrace{x-[x]}_{f(x)}\big)$

Έχουμε ότι $[x]\leq x<[x]+1 \Rightarrow 0\leq x-[x]<1$
Από την προηγούμενη πρόταση αν $x_n\to+\infty$ τότε και το όριο
$\lim\limits_{x\to\xi}(x-[x])$ υπάρχει τότε $x_n-[x_n]$ έχει το ίδιο όριο.

Έστω $x_n=n$, $[n]=n$, άρα $f(n)=0\to 0$
Έστω $y_n=n+\frac{1}{2}$, $\left[n+\frac{1}{2}\right]=n$ άρα $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=n+\frac{1}{2}-n$
$=1/2\to 1/2$

Άρα αφού βρήκα 2 ακολουθίες με διαφορετικά όρια,
το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει!

→ Όρια ρητών συναρτήσεων

Π.χ. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ n \\ x\to\xi}} \dfrac{3x^4+5x^2+7}{6x^6+4x+3}$

Δυνάμεις

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = \begin{cases} 0, & a>0 \\ 1, & a=0 \\ +\infty, & a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ 1, & a=0 \\ 0, & a<0. \end{cases}$$

Π.χ.

$$\lim_{x\to 4^-} \left(\frac{x+1}{4-x}\right)^{1/3} = \lim_{y\to +\infty} y^{1/3} = +\infty$$

Εκθετικές

$y = a^x$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a>1 \\ 1, & a=1 \\ 0, & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a>1 \\ 1, & a=1 \\ +\infty, & 0<a<1 \end{cases}$$

Τριγωνομετρικές

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Λογαριθμικές

$$\lim_{x\to \xi>0} \ln x = \ln \xi \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

→ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\lim_{x\to\xi}\sin x=\sin\xi$, $\lim_{x\to\xi}\cos x=\cos\xi$ κλπ.

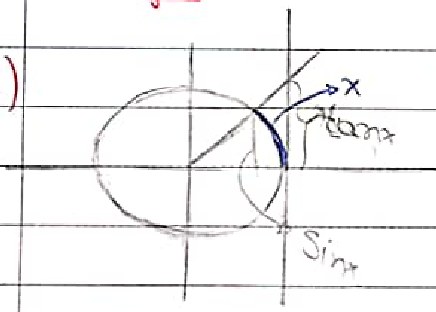
Βασικά Όρια

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Απόδειξη

(i)



$\sin x<x<\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\iff$

$\Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$

Για $x\to 0$, $\cos x\to 1$ και από κριτήριο παρεμβολής:
$\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

(ii) $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}$

Παραδείγματα

Βρείτε το όριο της ακολουθίας: $x_n=n\sin\frac{\pi}{n}$

$\boxed{\text{Υπενθύμιση: Αν } \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \text{ και } x_n \to \xi \ (x_n \neq \xi) \text{ τότε } f(x_n) \to \xi}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\xi = 0$ οπότε $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Έστω $x_n = \frac{\pi}{n}$

Τότε έχω ότι $f(x_n) \to 1$ δηλαδή $\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\pi} n \sin \frac{\pi}{n}$.

$\frac{1}{\pi} n \sin \frac{\pi}{n} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \sin \frac{\pi}{n} \to \pi$.

Πρόταση

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Απόδειξη

Γνωρίζω ότι $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \to e$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists$ n_0 τ.ω. όταν $n \geq n_0$:

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon,$$

όμως $[x] \leq x < [x] + 1$

Για $x > n_0$ έχω ότι $[x] \geq n_0$ και

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon$$

Άρα έχουμε: Για $\varepsilon>0$ τυχαίο $\exists\, n_0$ τ.ω. όταν $x>n_0$,

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e+\varepsilon \iff \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$$

Άρα $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$

Πρόταση

Έστω συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$:

(i) Αν $f\uparrow$ τότε ή $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)=\eta\in\mathbb{R}$ ή $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)=+\infty$

(ii) Αν $f\downarrow$ τότε ή $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)=\eta\in\mathbb{R}$ ή $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)=-\infty$

Συνεχείς Συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω $f: A\to\mathbb{R}$. Η f συνεχής στο σημείο ξ αν:

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi).$$

ή ισοδύναμα:

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0$ τ.ω. $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon\quad \forall\, x\in A$, και $|x-\xi|<\delta$

Άσκηση

Μελετήστε ως προς την συνέχεια στο $x=0$ την $y(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Απάντηση

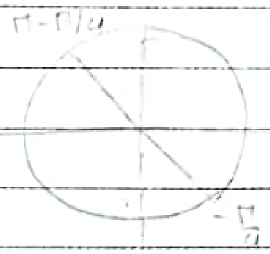
Είναι συνεχής διότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=y(0)$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν f, g συνεχείς τότε $f \pm g$, $f \cdot g$, cf, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ είναι συνεχείς.

Π.χ.

$$y(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sin x + \cos x}, \quad x \geq 0, \quad x \neq \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$



Άρα $y(x)$ συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$\left.\begin{array}{l} 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

Πρόταση

$f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$, $f(\xi) = \eta \in B$

Αν f συνεχής στο ξ και g συνεχής στη η τότε η $g \circ f$ συνεχής στο ξ.

Π.χ.

$y = \sin\sqrt{x}$.

Η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής, η $\sin y$ είναι συνεχής $\Rightarrow$

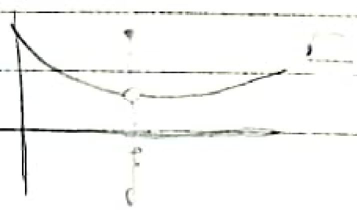
$\Rightarrow$ η $\sin\sqrt{x}$ συνεχής για $x \geq 0$.

Είδη ασυνέχειας

- $f: A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σ.σ. του A.

Ορισμός 1

Αν $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει αλλά είναι $\neq f(\xi)$

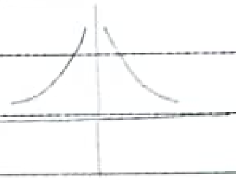


το ξ λέγεται σημείο άρσιμης ασυνέχειας
(αίρω)

• $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σ.σ. του A.

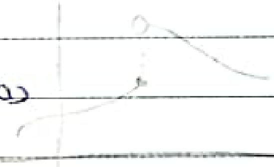
Ορισμός 2

Αν (i) $\exists \lim_{x\to\xi} = +\infty$ ή $-\infty$



ή

(ii) $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά.



$\lim_{x\to\xi^+} f(x) - \lim_{x\to\xi^-} f(x) =$ άλμα ασυνέχειας

Στις περιπτώσεις (i) και (ii) έχω ασυνέχεια πρώτου είδους.

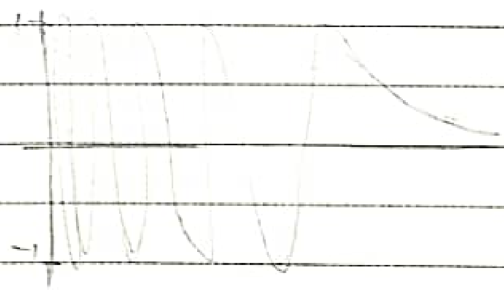
• $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σ.σ. του A.

Ορισμός 3

Αν δεν υπάρχει τουλάχιστον ένα από τα δύο πλευρικά όρια τότε έχουμε ασυνέχεια 2ου είδους ή ουσιώδη ασυνέχεια.

Π.χ.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Αν βρω 2 ακολουθίες $x_n \to 0$, $y_n \to 0$

$\lim \sin\frac{1}{x_n} \neq \lim \sin\frac{1}{y_n}$ είναι αρκετό

Έστω η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0$

και $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$, $\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$