Πρόταση

$f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής και $x_n \to \xi$, $x_n \in A$, τότε:

$$f(x_n) \to f(\xi)$$

Παρατήρηση

Λόγω συνέχειας η συνθήκη $x_n \neq \xi$ (που είχαμε στην αντίστοιχη πρόταση για το όριο) δεν χρειάζεται.

π.χ.

$$\sin\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right), \quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n} \to 0.$$

$\sin x$ είναι συνεχής

$\Rightarrow \sin(x_n) \to \sin(0) = 0.$

π.χ. (παράδειγμα για την αντίστοιχη πρόταση του ορίου. Όχι για την συνέχεια).

$$\left(\frac{n^2+3}{4n^2-3}\right)^{3/2} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{x^2+3}{4x^2-3}\right)^{3/2} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$$

Για x κοντά στο $+\infty$ (δηλ θετικά και μεγάλα) η f είναι συνεχής.

Έστω $x_n = n \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \cdot \ln(\cos 0) =$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \cdot 0 = 0.$

Συνεπώς και $\left(\frac{n^2+3}{4n^2-3}\right)^{3/2} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \to 0$

η.

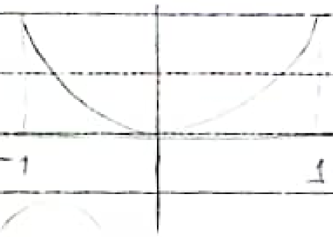
3 βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 1

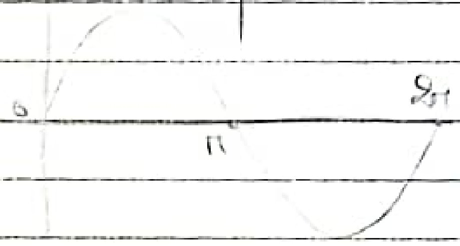
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
(Προσοχή $[a,b]$: κλειστό και φραγμένο!)

π.χ.

1) $[-1,1]$, $f(x)=x^2$
$0 \leq f(x) \leq 1$



2) $[0,2\pi]$, $y(x)=\sin x$
$-5 < \sin x < 10$

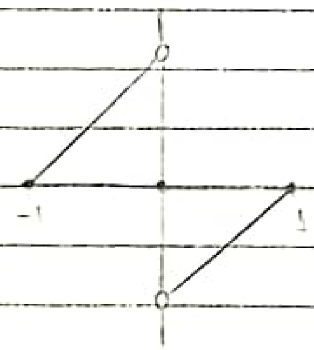


3) $(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ συνεχής στο $(0,1)$ αλλά όχι φραγμένη

Στο $[\varepsilon,1]$ η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\varepsilon}$

4) $y=\begin{cases} x+1 , & -1\leq x<0 \\ 0 , & x=0 \\ x-1 , & 0<x\leq 1 \end{cases}$, ορίζεται στο $[-1,1]$

Η y είναι όχι συνεχής αλλά φραγμένη.



Θεώρημα 2

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής ($[a,b]$, κλειστό και φραγμένο)
Τότε $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ τ.ω.:
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\ x \in [a,b]$$

Λέμε ότι η f λαμβάνει (παίρνει) μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Π.χ.

$[0,1]$, $y = f(x) = x$

$0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$

Αν όμως:

ανοιχτό $(0,1)$, $f(x) = x$

Έχω για κάθε x ότι $0 < f(x) < 1$

Όμως δεν υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τ.ω. $f(x_1) \leq f(x)$

Συνέχεια του παραδείγματος 4)

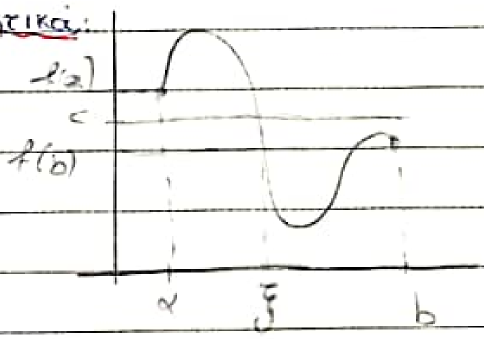
Η y λαμβάνει μέγιστη/ελάχιστη τιμή? Όχι

Θεώρημα 3 (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, Θ.Ε.Τ.)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f συνεχής τότε $\forall c$, $f(a) \leq c \leq f(b)$

$\exists$ $\xi \in [a,b]$ τ.ω. $f(\xi) = c$ ή $f(b) \leq c \leq f(a)$

Διαισθητικά:



Π.χ.

Η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = \cos x - x$ $\qquad f(0) = 1 > 0$

$f(\pi/2) = -\frac{\pi}{2} < 0$

Το $c=0$ είναι μεταξύ του $f(\pi/2) < 0 < f(0)$.
Συνεπώς από το Θ.Ε.Τ. $\exists\, \xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τ.ω. $f(\xi)=0$.

Παράδειγμα

$P(x) = x^3 + x^2 + 7x + 3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

$P(0) = 3 > 0$
$P(-1) = -4 < 0$

άρα από ΘΕΤ υπάρχει ρίζα στο $(-1, 0)$.

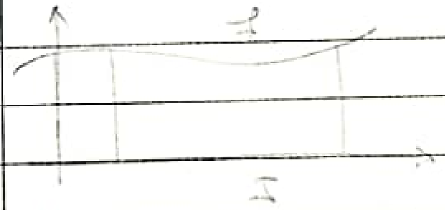
Τυπικές Εφαρμογές

Θεώρημα Bolzano

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(a)\cdot f(b) < 0$ τότε $\exists$
$\xi \in (a,b)$ τ.ω. $f(\xi) = 0$

Πρόταση (Ιδιότητα σταθερού προσήμου)

Αν $f: I \to \mathbb{R}$ (I = διάστημα) συνεχής και $f(x) \neq 0 \ \forall x \in I$
τότε είτε $f(x) > 0$ είτε $f(x) < 0$
$\forall x \in I$.



Άσκηση

Αν $f, g : I \to \mathbb{R}$ (διάστημα) συνεχείς και $f^2(x) = g^2(x)$, $f(x) \neq 0 \ \forall x \in I$.
Τότε δείξτε ότι $f(x) = g(x) \ \forall x \in I$ ή $f(x) = -g(x) \ \forall x \in I$.

Λύση

$f^2(x) - g^2(x) = 0 \iff$
$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$

Άρα:
$f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$, $x \in I$

Θα δείξω ότι $\forall\, x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = g(x)$ ή ισχύει $f(x) = -g(x)$

Έστω όχι: Τότε $\exists\ x_1, x_2 \in I$ τ.ω.

$f(x_1) = g(x_1)$ και $f(x_2) = -g(x_2)$

Επειδή $f(x) \neq 0$ η f κρατάει πρόσημο.

Έστω ότι $f(x) > 0$ στο I.

Έχω ότι $g(x_1) = f(x_1) > 0$ και $g(x_2) = -f(x_2) < 0$

Από ΘΕΤ ή Bolzano για την g

$g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ άρα $\exists\ \xi$ ανάμεσο στο x_1, x_2

τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Όμως $f^2(\xi) = g^2(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$

Άτοπο

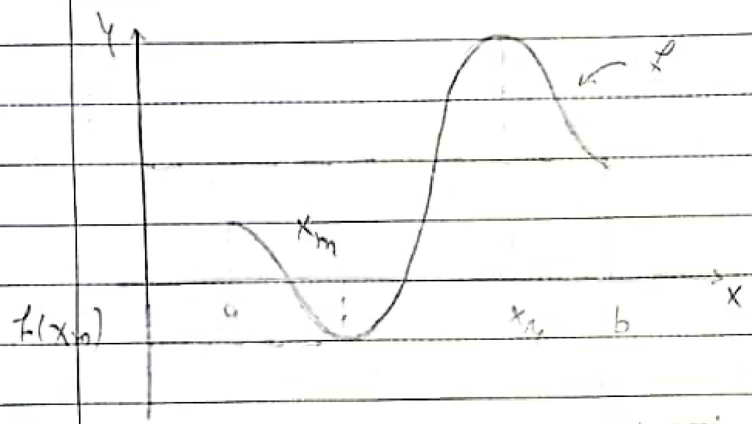
Άρα $f(x) \neq 0$ $\forall\, x \in I$

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης

Πρόταση 1

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ η συνεχής $f([a,b])$ (= σύνολο τιμών) είναι επίσης κλειστό και φραγμένο διάστημα.

π.χ.



$$f([a,b]) = [f(x_m), f(x_M)]$$

Παρατήρηση: Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, f συνεχής, $f((a,b))$ είναι διάστημα όχι απαραίτητα ανοιχτό.

Πρόταση 2

- Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, αύξουσα και συνεχής τότε:
$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

- Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, αύξουσα και συνεχής τότε:
$$f((a,b)) = \left(\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right)$$

- Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής τότε:
$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

- Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, φθίνουσα και συνεχής τότε:
$$f((a,b)) = \left(\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right)$$

Πρόταση 3

Έστω $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ (πολυώνυμο), $x \in \mathbb{R}$

Το σύνολο τιμών του $P_n(x)$ είναι:

(i) Αν $n = 2k+1$ (περιττός) σ.τ.$=(-\infty, +\infty)$

(ii) Αν $n = 2k$ (άρτιος) $\Rightarrow \begin{cases} a_{2k} > 0 & \text{το σ.τ.} = [a, +\infty) \\ a_{2k} < 0 & \text{το σ.τ.} = (-\infty, b] \end{cases}$

- Έχουμε δει ότι αν f μονότονη τότε η f^{-1} υπάρχει και έχει την ίδια μονοτονία.
  αντίστροφη

Πρόταση

Αν f γνήσια αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$ τότε το σύνολο τιμών της $f = J = [A = f(a), B = f(b)]$ και $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$

Αντίστοιχα αν f γνήσια φθίνουσα: $J = [B = f(b), A = f(a)]$ και $f^{-1} : [B, A] \to [a,b]$.

Παράγωγοι

Παράγωγος $\to$ ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ στο σημείο $x = \xi$.
$\to$ Εφαπτόμενη ευθεία σε γράφημα συνάρτησης στο $x = \xi$.

Ορισμός

$f : A \to \mathbb{R}$, ξ σ.σ. τ.ω.:

Αν $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ υπάρχει το λέω παράγωγο της f στο ξ και $= f'(\xi)$.

Άλλοι τρόποι γραφής:

$$y'(\xi), \quad f'(\xi), \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\xi}, \quad \left.Df(x)\right|_{x=\xi}$$

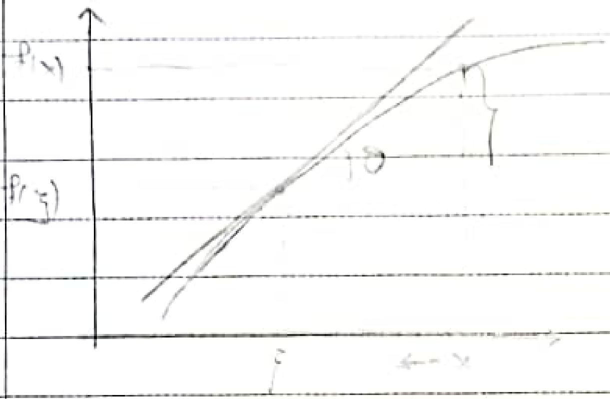
Μπορώ να ορίσω πλευρικές παραγώγους: $\lim_{x \to \xi^{\pm}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'_{\pm}(\xi)$

Αν το ξ είναι εσωτερικό σημείο του A τότε f παραγωγίσιμη στο ξ $\Leftrightarrow$ αριστερά και δεξιά όρια είναι ίσα.

$[a,b]$ Αν όμως π.χ. $\xi = a$ τότε ορίζεται μόνο η $f'_+(\xi)$

Άλλος τρόπος γραφής: $f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$

Γεωμετρικά:



$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

$f'(\xi)$ = εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη στο γράφημα της f ευθεία στο σημείο ξ

Π.χ.

- $f(x)=x^2$ παράγωγος στο σημείο $\xi=1$.

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 \xrightarrow[x\to 1]{} 2 \text{. Άρα } \left.\frac{d(x^2)}{dx}\right|_{x=1} = 2$$

- $y=\sqrt{|x|}$, στο $x=0$

$$\frac{\sqrt{|x|}-0}{x-0}$$

Άρα εδώ: $x>0$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$|x|=-x \Leftarrow x<0$: $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = -\infty$

- $y = $ σταθ. , $y = c \Rightarrow y' = 0$.

- $y = x^n$

$$\lim_{x \to \xi} \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{\cancel{(x-\xi)}\left(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \dots + \xi^{n-2}x + \xi^{n-1}\right)}{\cancel{x-\xi}} =$$

$$= n x^{n-1}$$

- $y = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$?

$$\frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Άρα $y'(0) = 0$ και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0.

- $(\cos x)'\Big|_{x=\xi}$

(χρήση του ορισμού). $\dfrac{\cos x - \cos\xi}{x - \xi} \overset{\text{από τριγωνομετρική ταυτότητα}}{=} \dfrac{-2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}}{x-\xi} =$

$$= -\frac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \cdot \sin\frac{x+\xi}{2} \xrightarrow[x \to \xi]{} -\sin\xi$$

$$\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y \to 0]{} 1$$