Ιδιότητες Παραγώγου

10/11/2023

1) Αν f παραγωγίσιμη στο $x=\xi$ είναι συνεχής στο $x=\xi$

Απόδειξη

$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ υπάρχει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi)=f(x)-f(\xi)$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\downarrow \atop f'(\xi)}\underbrace{(x-\xi)}_{\downarrow \atop 0}+f(\xi) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$ □

Άρα για $x\to\xi$

Η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά όχι παραγωγίσιμη

2) Αν f, g παραγωγίσιμες: $(f\pm g)'=f'\pm g'$, $(fg)'=f'g+fg'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}, \quad (g\neq 0)$$

3) (κανόνας αλυσίδας)

Αν $f: A\to B$, $g: B\to \mathbb{D}$, $\xi\in A$, $\eta=f(\xi)\in B$

Αν f, g παραγωγίσιμες:

$$(g\circ f)'(\xi)=g'(\eta)\,f'(\xi)=g'(f(\xi))\,f'(\xi)$$

4) $f: I$ (διάστημα) $\to \mathbb{R}$, $f \uparrow$ και παραγωγίσιμη στο $\xi \in I$, $\eta = f(\xi)$

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} 1/f'(\xi) & , f'(\xi) \in \mathbb{R} \\ 0 & , f'(\xi) = +\infty \\ +\infty & , f'(\xi) = 0 \end{cases}$$

Αν $f \downarrow$ ισχύουν τα αντίστοιχα.

Απόδειξη

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} =$$

$$= \lim_{x \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}} = \frac{1}{f'(\xi)}$$

Παράδειγμα

$$y = \sin x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$\to$ η arcsin είναι η αντίστροφη της sin

$\arcsin y : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \in$

$$\frac{d(\arcsin y)}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{d(\sin x)}{dx}\right|_{x = \arcsin y}} = \frac{1}{\left.\cos x\right|_{x = \arcsin y}} = \left(\text{όταν } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ τότε } \cos x > 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Τελικά:

$$\frac{d(\arcsin y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1 \\ +\infty, & y=\pm 1 \end{cases}$$

Πολύ χρήσιμη:

$$\frac{d(\arctan y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}, \quad -\infty<y<+\infty$$

$$\frac{d(\arccos y)}{dy} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1 \\ -\infty, & y=\pm 1 \end{cases}$$

- Παράγωγοι λυωστών συναρτήσεων:

→ $(e^x)' = e^x$ → $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \ (x\neq 0)$

→ $(a^x)' = (e^{x\ln a})' \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} e^{x\ln a}(x\ln a)' = \ln a \cdot a^x, \ a>0$

→ $(x>0)$, $(x^x)' = (e^{x\ln x})' \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} e^{x\ln x}(x\ln x)' =$

$$= x^x(\ln x+1)$$

Άσκηση:

Βρείτε το όριο: (i) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \overset{0}{\overset{\|}{\ln 1}}}{x-1} = (\ln x)'\Big|_{x=1} = 1$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x-0} = (e^x)'\Big|_{x=0} = 1$

4 Σημαντικά Θεωρήματα (για παραγώγους)

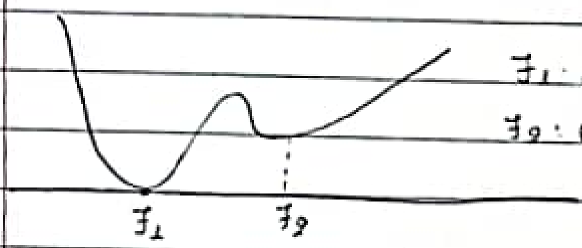
Ορισμός:

$f: A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$

(i) ξ σημείο ολικού μεγίστου αν $f(x) \leq f(\xi)$ $\forall x \in A$

(ii) ξ σημείο τοπικού μεγίστου αν $f(x) \leq f(\xi)$ $\forall x$ με $|x-\xi| < \delta$, $x \in A$ για κάποιο $\delta > 0$

Αντίστοιχο για ελάχιστο.



ξ_1: σημείο ολικού ελαχίστου

ξ_2: σημείο τοπικού ελαχίστου

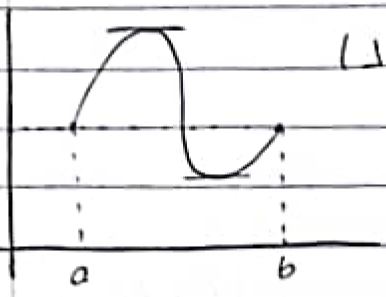
Θεώρημα 1: (Fermat)

$f: A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι $\xi \in (a,b) \subset A$, αν ξ σημείο τοπικού ακροτάτου (δηλαδή μέγιστο ή ελάχιστο) και f παραγωγίσιμη στο ξ, τότε $f'(\xi) = 0$.

Θεώρημα 2: (Rolle)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω.:

$$f'(\xi) = 0$$



(Γεωμετρικά)

Απόδειξη:

Αν f = σταθερή προφανώς. Αν όχι υπάρχει σημείο x_0 τ.ω.:

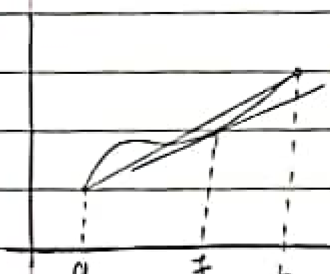
$$f(x_0) > f(a) \quad ή \quad f(x_0) < f(a)$$

Έστω $f(x_0) > f(a)$. Επειδή f συνεχής στο $[a,b]$ έχει μέγιστη τιμή έστω $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a)$ για κάποιο $\xi \in (a,b)$
Από Θεώρημα 1, $f'(\xi) = 0$

Θεώρημα 3: (Θ. Μέσης Τιμής Lagrange)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b)
τότε $\exists$ $\xi \in (a,b)$ τ.ω.:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (*)$$



Απόδειξη:

Έστω $h(x) = (b-a)f(x) - (f(b)-f(a))x$
Εφαρμόζω στην h το Θεώρημα 2, $h(a) = h(b) = 0$
άρα $\exists$ $\xi \in (a,b)$ τ.ω.:

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow (*)$$

Θεώρημα 4: (Θ.Μ.Τ. Cauchy)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε $\exists\ \xi \in (a,b)$ τ.ω.:

$$(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$$

Απόδειξη:

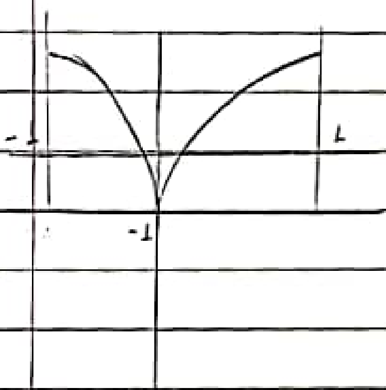
$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$ και εφαρμόζω Θεώρημα 2 στην h.

Άσκηση:

Έστω $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 1$. Ισχύει $f(-1) = f(1) = 1$.
Υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$?

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2\,\frac{x^{2/3}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/3}} = +\infty$$



Δεν υπάρχει τέτοιο ξ!

Άσκηση:

f παραγωγίσιμη

Έστω $|f'(x)| < \frac{1}{x}$, $x > 1$. Δηλ. ότι: $\lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x}) - f(x)) = 0$

Λύση:

Εφαρμόζω ΘΜΤ στο $[x, x+\sqrt{x}]$. Άρα $\exists\ \xi \in (x, x+\sqrt{x})$

$$f(x+\sqrt{x}) - f(x) = f'(\xi)(x+\sqrt{x} - x) = \sqrt{x}\, f'(\xi)$$

$$|f(x+\sqrt{x}) - f(x)| = \sqrt{x}\,|f'(\xi)| < \sqrt{x}\,\frac{1}{\xi} < \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow |f(x+\sqrt{x}) - f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$\forall\ 0 < x < \xi \Rightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x}) - f(x)) = 0$$

Ακρότατα και μονοτονία

- Πρόταση 1:

(I διάστημα) $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.
- Η f είναι αύξουσα αν και μόνον αν $f'(x) \geq 0$
- Η f είναι φθίνουσα αν και μόνον αν $f'(x) \leq 0$.

- Πρόταση 2

Ίδιες προϋποθέσεις όπως πρόταση 1, αν $f'(x) > 0$ (γνήσια), τότε η f είναι γνήσια αύξουσα

! Το αντίστροφο δεν ισχύει

π.χ. Η $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $(y'(0) = 0)$ είναι γνήσια αύξουσα

- Πρόταση 3:

$f:[a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $\xi\in(a,b)$. Αν $f'(x)\geq 0$ στο (a,ξ) και $f'(x)\leq 0$ στο (ξ,b) τότε η ξ είναι σημείο μεγίστου (Η f δεν απαιτείται να είναι παραγωγίσιμη στο $x=\xi$)
Αντίστοιχα, για σημείο ελαχίστου.

Παραδείγματα (στην απόδειξη ανισοτήτων)

1) Δείξτε ότι: $e^x\geq x+1$, $x>0$

Ορίζω $f(x)=e^x-x-1$, $x\geq 0$

$$f'(x)=e^x-1\geq 0, \text{ άρα } f\uparrow \Rightarrow f(x)\geq f(0)$$

$\Rightarrow f(x)\geq 0 \Rightarrow e^x\geq x+1$, $x\geq 0$

2) Δείξτε ότι: $x\geq \arctan x\geq x-\dfrac{x^3}{3}$, $x\geq 0$

Θα δείξω την $\arctan x\geq x-\dfrac{x^3}{3}$ (παρόμοια αποδεικνύω την πρώτη)

$$y_2(x)=\arctan x-x+\frac{x^3}{3}, \quad y_2(0)=0$$

$$y_2'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2=\frac{1-(1+x^2)+x^2(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^4}{1+x^2}>0, \text{ για } x>0$$

Συνεπώς, $y_2\uparrow$, άρα: $y_2(x)\geq y(0)=0$

Δεύτερη Παράγωγος

Αν $f'(\xi)=0$ το ξ λέγεται κρίσιμο σημείο.

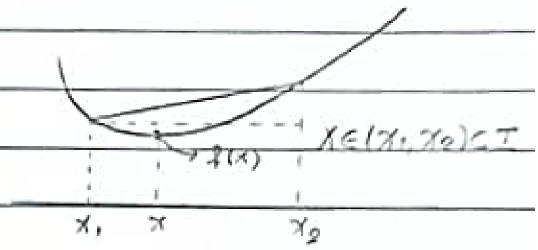
Κριτήριο 2ης παραγώγου

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $\xi\in(a,b)$ και f έχει δεύτερη παράγωγο στο σημείο ξ. Τότε:

- αν $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)>0 \Rightarrow \xi$ τοπικό ελάχιστο
- αν $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)<0 \Rightarrow \xi$ τοπικό μέγιστο

Ορισμός:

f κυρτή στο I



$$f(x)\le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$$

ή ισοδύναμα: $$f(x)\le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)+f(x_2)$$

Ισοδύναμος τρόπος:

$x=(1-t)x_1+x_2$, για $t\in(0,1)$

$$f((1-t)x_1+tx_2)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2) \quad (*)$$

Ορισμός:

Η f κοίλη: αντιστρέφω τις ανισότητες

Πρόταση 1:

Αν $f: I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Τότε:

- f: κυρτή αν και μόνον αν $f'(x)$ αύξουσα
- f: κοίλη αν και μόνον αν $f'(x)$ φθίνουσα

Πρόταση 2:
Αν f όπως στην πρόταση 1 και έχει $2^{η}$ παράγωγο στο εσωτερικό του I, τότε:

(i) f κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in$ εσωτερικό του I

(ii) f κοίλη αν και μόνο αν $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in$ εσωτερικό του I

π.χ

Δείξτε ότι: $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Λύση:
έστω $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$, άρα η f κυρτή!

εφαρμόζω την (*) με $t = \frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right), \text{ δηλαδή:}$$

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(e^{x_1}+e^{x_2}\right)$$

Ανάπτυγμα Taylor

Θεώρημα:
έστω $f: I \to \mathbb{R}$ και $\xi \in I$. Η f έχει $n \in \mathbb{N}$ παραγώγους στο I και $(n+1)$ παραγώγους στο εσωτερικό του I. Τότε $\forall x \in I$ υπάρχει σημείο η μεταξύ ξ και x (δηλαδή $\eta \in (x,\xi)$ ή $\eta \in (\xi, x)$) τ.ω.:

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-\xi)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}}}_{\text{υπόλοιπο}} \quad (0)$$

Υπενθύμιση:
ΘΜΤ: $f(x) - f(\xi) = f'(\eta)(x-\xi) \Leftrightarrow f(x) = f(\xi) + f'(\eta)(x-\xi)$,

Απόδειξη:

Σταθεροποιώ x, ξ και ορίζω τον αριθμό A ώστε να ισχύει:

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n + \frac{A}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση g:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} \quad (1)$$

Για την g παρατηρώ ότι: (μετά από κάποιες πράξεις)

$$g'(t) = \frac{A - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad (2)$$

Στο $[\xi, x]$ (υποθέτω $x > \xi$), τότε $g(x) = 0$ και $g(\xi) = 0$
(από (1))

Άρα, εφαρμόζω ΘΜΤ στην g και έχω ότι $\exists\ \eta \in (\xi, x)$
τ.ω. $g'(\eta) = 0$

Από (2) $\Rightarrow A = f^{(n+1)}(\eta)$ και η (0) έχει αποδειχθεί.