Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών

Θεώρημα 1ο (Κανόνας L'Hospital)

Έχω 2 συναρτήσεις $f,g : (\xi,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες και $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (\xi,b)$, και $\lim_{x\to\xi^+} g(x) = \lim_{x\to\xi^+} f(x) = 0$.

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (*) τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

και ισχύει: $\boxed{\lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

(Θα μπορούσα να έχω $x\to\xi^-$, $x\to\xi$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$)

Απόδειξη

Ορίζω $f(\xi)=g(\xi)=0$, οπότε οι f,g είναι συνεχείς στο $[\xi,x]$ για $x<b$. Οπότε μπορώ να εφαρμόσω το ΘΜΤ του Cauchy. Άρα $\forall x\in(\xi,b)$, $\exists\, \zeta\in(\xi,x)$ τ.ω.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

((*) Το όριο μπορεί να είναι $A\in\mathbb{R}$, $+\infty$ ή $-\infty$.)

Βασική Ιδέα: καθώς $x\to\xi \Rightarrow \zeta\to\xi$

συνεπώς:
$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\zeta\to\xi} \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

Π.χ.

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$ $\quad$ $g(x)=x$, $f(x)=e^x-1$

$g'(x)=1$, $f'(x)=e^x$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x}{1}$$

Οπότε $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$

Συνεπώς το $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Θεώρημα 2ο (κανόνας L'Hospital)

Έχουμε $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ και $g, g' \neq 0$ για $x \in (\xi, b)$ και $\lim_{x\to \xi^+} |g(x)| = +\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

(θα μπορούσα να έχω $x \to \xi^-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$)

Παραδείγματα:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x}$, $b > 0$, $a > 1$

- αν $b = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0$

- αν $b \neq 1$, $\frac{x^b}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{x/b}}\right)^b \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

!! Το εκθετικό πάει στο $+\infty$ πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη.

π.χ.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1000}}{e^{x/1000}} = 0$$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$, $b>0$, $a>0$

- αν $b=1$: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ax^a} = 0.$

- αν $b\neq 1$: $\left(\frac{\ln x}{x^{a/b}}\right)^b \to 0.$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\cos x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x}{1}$ ← Το όριο δεν υπάρχει !! άρα δεν εφαρμόζεται ο L' Hospital.

$$\frac{x-\cos x}{x} = 1 - \frac{\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

4) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x \quad (0\cdot(-\infty))$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

Τότε: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

Γενικά: $x^b |\ln x|^a \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, $b>0$, $a>0$

5) $\lim_{x\to 0^+} x^x \quad (0^0)$

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{\overset{\to 0}{x\ln x}} \to 1$$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}} = e^0 = 1$

$\left(\ln x = e^{\ln(\ln x)} \right)$

Θα πάρουμε τον εκθέτη: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$

7) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow ?$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ τότε υπάρχει (και είναι ίδιο) το όριο της $n^{1/n} = \sqrt[n]{n}$

$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$, $\quad \frac{\ln x}{x} \to 0$

Ορισμός

Έχω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ ή $\xi = +\infty, -\infty$ και $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Τότε γράφω:

$f(x) = o(g(x))$ για x κοντά στο ξ

↑ μικρό όμικρον

"η f είναι μικρή σε σχέση με την g κοντά στο ξ"

Π.χ.

$\ln x = o(x)$, $x \to +\infty$. (από Π2)