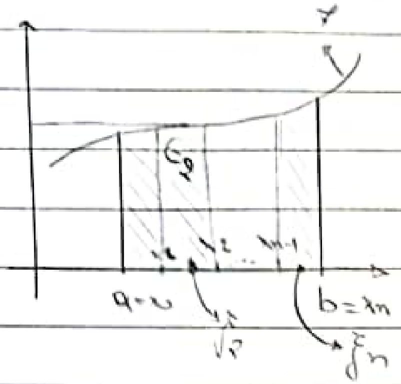
Ολοκλήρωμα Riemann

Αν f συνάρτηση $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα της f από το a μέχρι το b, είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα.



$E_2 \simeq (x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2)$

Τώρα θα δώσω τον αυστηρό ορισμό.
Έστω $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ μία διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$.
Στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ διαλέγω τυχαίο σημείο ξ_k.

- Αν E το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της f, τότε:

$$E \simeq E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$$

Παίρνοντας λεπτότερες διαμερίσεις δηλ. περισσότερα σημεία x_k τέτοια ώστε: $(x_k - x_{k-1}) \to 0$ (*)

Αυστηρός ορισμός:

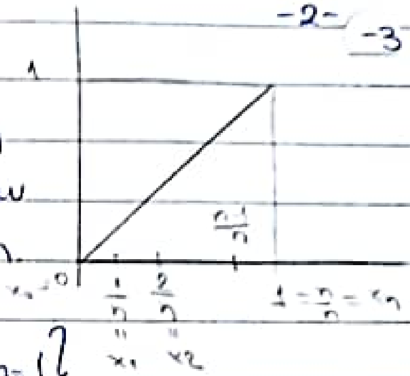
Αν καθώς $n \to \infty$ έτσι ώστε να ισχύει η (*) και το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$$

έχει όριο, αυτό το όριο το ονομάζω ολοκλήρωμα Riemann και η f λέμε ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τα αθροίσματα $\sum_{k=1} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$ λέγονται αθροίσματα Riemann.

Παράδειγμα

Υπολογισμός του $\int_0^1 x\,dx \left(=\frac{1}{2}\right)$ με χρήση αθροισμάτων Riemann.



Διαμέριση $= \left\{x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ \dots,\ x_k=\frac{k}{n},\ \dots,\ x_n=1\right\}$

$$E_k \approx \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{1/n}\ \underbrace{f(x_k)}_{=x_k=\frac{k}{n}} = \frac{k}{n^2}$$

Άρα το άθροισμα Riemann είναι:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \rightarrow \frac{n(n+1)}{2} =$$

→ σταθεροί.

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2}$$

Ιδιότητες:

Π1) $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες, f φραγμένη

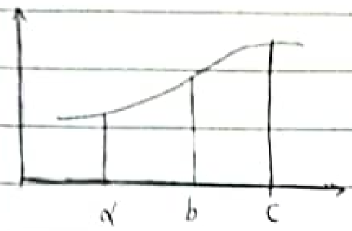
(i) $\lambda \cdot f$ ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

(ii) $f+g$ ολοκληρώσιμες και $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(iii) fg ολοκληρώσιμες και $\int_a^b fg = \int_a^b f \cdot \int_a^b g$.

(iv) Αν $|f| > m > 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ ολοκληρώσιμη.

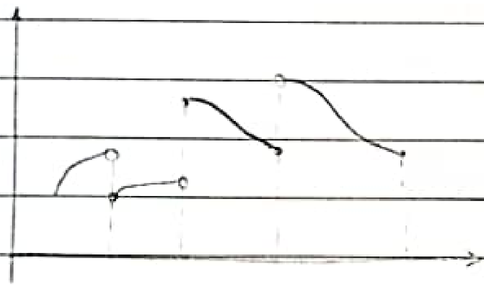
Π2)  $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$



Ορισμός:

Η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$ αν υπάρχουν σημεία: $t_0=a, t_1, t_2, \dots, t_n=b$ όπου η f είναι συνεχής στα (t_{k-1}, t_k), $k=1,2,\dots,n$ και υπάρχουν τα πλευρικά όρια.

Πχ.



Π3) Αν f τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Σύγκριση Ολοκληρωμάτων

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες.

Π4) Αν $f(x)\leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

και $\int_a^b f = \int_a^b g$ και f,g συνεχείς τότε $f=g$ στο $[a,b]$

Π5) Αν $f(x)\leq u\in\mathbb{R}$ τότε $\int_a^b f(x)dx \leq u(b-a)$

Αν $f(x) \geq \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \geq \ell(b-\alpha)$

Π6) (Τριγωνική ανισότητα για ολοκληρώματα)

$$\left| \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \right| \leq \int_{\alpha}^{b} |f(x)|\,dx$$

αποδ

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Χρησιμοποιώντας την Π4 θα έχουμε:

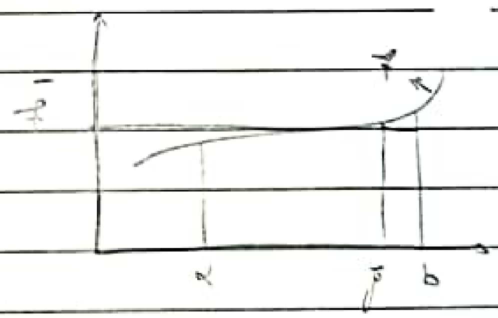
$$\int_{\alpha}^{b} |f|\,dx \leq \int_{\alpha}^{b} f\,dx \leq \int_{\alpha}^{b} |f|\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\alpha}^{b} f\,dx \right| \leq \int_{\alpha}^{b} |f|\,dx$$

Ορισμός

Η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι:

(ορθώς) $$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$



Π7) (ΘΜΤ ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τ.ω.:

$$\underbrace{\frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx}_{\bar{f}} = f(\xi).$$

Απόδ.

Έχω ότι $\exists\ \zeta, \eta \in [a,b]$ τ.ω.: $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$

(διότι η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή).

Οπότε από (Π5): $f(\zeta)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(\eta)(b-a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\zeta) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(\eta).$$

Άρα από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχω ότι $\exists\ \xi \in [\zeta, \eta]$ τ.ω.:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Άσκηση

Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt=$$

Λύση

Για x μεγάλα άρα και για $t\geq x$ μεγάλα έχω ότι:

$$\frac{t}{1+t^2}<\frac{t}{t^2}=\frac{1}{t}$$

$t\geq x>0\Rightarrow \frac{1}{t}\leq\frac{1}{x}$

Άρα:

$$0<\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt<\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{1}{t}\,dt<\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{1}{x}\,dt=$$

$$=\frac{1}{x}\int_x^{x+\sqrt{x}}dt=\frac{1}{x}\left(x+\sqrt{x}-x\right)=\frac{1}{x}\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$$

Συνεπώς, $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt=0$

Παράγουσα και αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός

Αν έχω 2 συναρτήσεις $f,F:I\to\mathbb{R}$ και ισχύει $F'(x)=f(x)$ τότε η F λέγεται παράγουσα ή αντιπαράγωγο της f.
Αν F μια αντιπαράγωγος, τότε και $F+c$ (c οποιαδήποτε σταθερά) είναι επίσης αντιπαράγωγος.

Ορισμός

$f:I\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν $a\in I$ και c τυχαία σταθερά τότε:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + c \quad , x\in I$$

ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I.

Πρόταση

Αν $f: I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη

Έστω $\xi\in I$. Τότε $\left|F(x)-F(\xi)\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^\xi f(t)\,dt\right|$

$$=\left|\int_x^\xi f(t)\,dt\right| \leq M|x-\xi| \xrightarrow{x\to\xi} 0$$

Από την υπόθεση η $|f(x)|<M$ στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

$f: I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα της I, $a\in I$ και έστω:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad , x\in I$$

Αν f συνεχής στο σημείο ξ, τότε $F'(\xi)=f(\xi)$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο. Επειδή f είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. όταν $|x-\xi|<\delta$ τότε $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$. (*)

Για $|x-\xi|<\delta$ υπολογίζω:

$$\left|\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} - f(\xi)\right| = \left|\frac{\int_a^x f\,dt - \int_a^\xi f\,dt}{x-\xi} - f(\xi)\right| =$$

$$= \left| \frac{\int_x^{\xi} f(t)dt - f(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} \right| = \left| \frac{\int_x^{\xi} f(t)dt - \int_{\xi}^{x} f(\xi)dt}{x-\xi} \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_{\xi}^{x} (f(t) - f(\xi))dt}{x-\xi} \right| = \frac{\left| \int_{\xi}^{x} (f(t)-f(\xi))dt \right|}{|x-\xi|} \overset{(*)}{\leq} \frac{\left| \int_{\xi}^{x} |f(x)-f(\xi)| dt \right|}{|x-\xi|}$$

$$< \frac{\left| \varepsilon \int_{\xi}^{x} 1 \cdot dt \right|}{|x-\xi|} = \frac{\varepsilon |x-\xi|}{|x-\xi|} = \varepsilon$$

Άρα έχω δείξει ότι για κάθε $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ τ.ω. όταν:

$$|x-\xi|<\delta \Rightarrow \left| \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} - f(\xi) \right| < \varepsilon$$

Άρα το $\lim_{x\to\xi} \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} = f(\xi)$ δηλ. $F'(\xi) = f(\xi)$.

Βασική συνέπεια

Αν F αντιπαράγωγος της f τότε: $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = F(b) - F(\alpha) = F(x)\Big|_{\alpha}^{b}$

Απόδ.

Η $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι αντιπαράγωγος άρα και η $G(x) = F(x) + C =$

$= \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + C$ είναι αντιπαράγωγος

$G(\alpha) = C$, $G(b) = \int_{\alpha}^{b} f(t)dt + G(\alpha) \Rightarrow \int_{\alpha}^{b} f(t)dt = G(b) - G(\alpha)$

$= F(b) - F(\alpha)$

- $\int x^k dx$, $(k \neq -1)$ $= \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

Π.χ.

$$\int_1^2 x^5\,dx = \frac{x^6}{6}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2^6 - 1\right)$$

Βασικές τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων

A: Με αλλαγή μεταβλητής (ή αντικατάσταση)
B: Ολοκλήρωση κατά μέρη (ή κατά παράγοντες)

A) I, J διαστήματα και $\phi: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$, η ϕ έχει συνεχή παράγωγο στο I και f συνεχή στο J. Τότε:

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy \Big|_{y=\phi(x)}$$

Αποδ.
Έστω F(y) μία παράγουσα της f(y).

$$\left(F(\phi(x))\right)' = \underbrace{F'(\phi(x))}_{f(\phi(x))} \cdot \phi'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int \left(F(\phi(x))\right)'\,dx = F(\phi(x)) = \int f(y)\Big|_{y=\phi(x)}$$

Π.χ.

- $$\int (\sin x)^n \overbrace{\cos x}^{(\sin x)'}\,dx = \int y^n\,dy \Big|_{y=\sin x} = \frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_{y=\sin x} = \frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}$$

- $$\int_1^5 \frac{\overset{(x^2)'dx}{2x\,dx}}{x^2+1} = \int_1^5 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \int_2^{26} \frac{dy}{y} = \ln y\Big|_2^{26} = \ln 13$$

$y = x^2+1$

$d\phi(x) = \phi'(x)\,dx$

B. $f, g : I \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παράγωγο. Τότε:

(i) $$\int f g' \, dx = f g - \int f' g \, dx$$

(ii) $$\int_a^b f g' \, dx = - \int_a^b f' g \, dx + f g \Big|_a^b$$

Απόδ.

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow fg' = (fg)' - f'g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int fg' = fg - \int f'g$$ (απλή εφαρμογή του κανόνα γινομένου για παραγώγιση)

π.χ.

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \,(x)' \, dx = x \ln x - \int \underbrace{(\ln x)' x}_{1} \, dx =$$

$$= x \ln x - x + C$$