



Πέμπτη 11 Απριλίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 9

1). Εστω η σειρά Fourier της (βλ. Φ8/2)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Σέ ποιά συνάρτηση συγκλίνει κατά σημείο; Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $[-\pi, \pi]$;

2). Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την

$$f(x) = \frac{(x - \pi)^2}{4}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Στη συνέχεια υπολογίστε τα όρια των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

3). Δίδεται η σειρά Fourier

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

(α) Δείξτε ότι

$$x^4 - 2\pi^2 x^2 = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

(β) Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.$$