ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 11 Ιουνίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Τελικό διαγώνισμα

1). Να βρεθεί η γενική λύση $u = u(x, y)$ της εξίσωσης

$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

2). Η $u = u(x, t)$ είναι κλασική λύση της

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 1, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \qquad t > 0, \end{aligned}$$

και συνεχής στο $R = [0, 1] \times [0, \infty)$.

(i) Βρείτε τη λύση $w = w(x)$ της στάσιμης εξίσωσης δηλ.

$$-w_{xx} = 1, \quad 0 < x < 1, \quad w(0) = w(1) = 0.$$

(ii) Δείξτε οτι για κατάλληλη σταθερά $a > 0$ ισχύει: $(1 - e^{-at})w(x) \le u(x, t) \le w(x)$.
(iii) Δείξτε οτι $u(x, t) \to w(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ καθώς $t \to +\infty$.

3). Δείξτε οτι για $-\pi < x < \pi$,

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ...\right).$$

Στη συνέχεια δείξτε τις παρακάτω σχέσεις

$$(a) \qquad x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - ...\right), \qquad -\pi < x < \pi,$$

$$(b) \qquad x(\pi + x)(\pi - x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - ...\right), \qquad -\pi < x < \pi.$$

4). Δείξτε οτι η παρακάτω εξίσωση έχει το πολύ μία κλασική λύση $u = u(x, t)$,

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - u_t &= F(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Διάρκεια εξέτασης 1.50′.