



Τετάρτη 7 Μαΐου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 10

1) Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της

$$f(x, y) = xy - y + x - 1,$$

για (x, y) στον κλειστό δίσκο $x^2 + y^2 \leq 2$. Στο σύνορο του χωρίου εργαστείτε με τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange.

2) Έστω E η έλλειψη που προκύπτει από την τομή του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{25} = 1$ και του επιπέδου $x + y + z = 0$. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των σημείων της E από την αρχή των αξόνων. Δικαιολογήστε την ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου.

3) Πότε n θετικοί αριθμοί με δεδομένο άθροισμα έχουν μέγιστο γινόμενο; Στη συνέχεια αποδείξτε την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου του Cauchy:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

Πότε αυτή η ανισότητα γίνεται ισότητα;

4) Οι συναρτήσεις f, g είναι ομαλές συναρτήσεις μίας μεταβλητής και $F(x, y) = f(x + g(y))$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

5) Δείξτε ότι η

$$x^3 z^2 - z^3 y x = 0,$$

λύνεται ως προς z , σαν συνάρτηση του (x, y) κοντά στο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, όχι όμως κοντά στην αρχή των αξόνων. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Στη συνέχεια, στο ίδιο σημείο, υπολογίστε την τιμή της $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, αν είναι γνωστό ότι η z είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

Παράδοση: Πέμπτη 15 Μαΐου