



Τετάρτη 14 Μαΐου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 11

1) Εξετάστε την επιλυσιμότητα του παρακάτω συστήματος

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$

$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$

$$x + z + w + u^2 + 2 = 0,$$

ως προς u, v, w συναρτήσει των x, y, z κοντά στο $x = y = z = 0, u = v = 0$ και $w = -2$.

2) Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x), v = v(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $x_0 = 0$ και έτσι ώστε να είναι $u_0 = u(0) = 1, v_0 = v(0) = 1$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ συναρτήσει των x, u, v κοντά στα $x_0 = 0, u_0 = 1, v_0 = 1$.

$$e^{xv} + x + u = 2, \quad v + xe^u = 1.$$

3) Θεωρούμε την

$$f(x, y) = \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right].$$

Αντιστρέφεται τοπικά αυτή η απεικόνιση του $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$ στον $\mathbf{R}^2$ κοντά στο $(x, y) = (0, 1)$; Αντιστρέφεται σε όλο το πεδίο ορισμού της;

4) Πότε οι σχέσεις

$$\begin{aligned} 2x &= v^2 - u^2, \\ y &= uv, \end{aligned}$$

ορίζουν τα u, v ως συναρτήσεις των x, y ; Στη συνέχεια βρείτε τις τιμές των μερικών παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ όταν $(u, v) = (1, 1)$.

Παράδοση: Πέμπτη 22 Μαΐου