



Τετάρτη 5 Μαρτίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 3

1) Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$(a) \frac{e^x y^2}{x - y}, \quad (b) \frac{xy^2}{\sqrt{x - y}}, \quad (c) \frac{y^2 \sqrt{x}}{\sqrt{y - x^2}}.$$

2) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν και σε περίπτωση που δεν υπάρχουν δώστε απόδειξη.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} e^x y^2, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 3}, \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

3) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι κατά μήκος των ευθειών $y = kx$ ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

(β) Ποιό είναι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ όταν πλησιάζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$; Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

4) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$