



Τετάρτη 12 Μαρτίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός ΙΙ

Φυλλάδιο 4

1) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν και σε περίπτωση που δεν υπάρχουν δώστε απόδειξη.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x - y + 1)}{x + y - 3}, \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^{y^2} \quad (d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$$

Υποδ. Για το (δ) χρησιμοποιήστε κατάλληλα την ανισότητα  $2ab \leq a^2 + b^2$ .

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x - y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & \text{αν } xy \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η  $f(x, y)$  είναι συνεχής στο σημείο  $(0, 0)$ .

3) Δείξτε ότι για  $x > 0$  ισχύει

$$\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0.$$

Στη συνέχεια μελετήστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - \sin x + y}{x^3 + 6y}.$$

4) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

για κάθε  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Είναι η  $f$  συνεχής;