



Τετάρτη 19 Μαρτίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 5

1) Περιγράψτε τις παρακάτω καμπύλες

$$\mathbf{c}(t) = (\sin t, 3 \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\mathbf{c}(t) = (2 \sin t, \cos t, t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Στη συνέχεια βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα την τυχαία χρονική στιγμή t .

2) Ένα σωματίδιο ακολουθεί την καμπύλη $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, την οποία εγκαταλείπει κατά την κατεύθυνση της εφαπτομένης όταν $t = 2$. Βρείτε τη θέση του σωματιδίου όταν $t = 3$.

3) Ελέγξτε ως προς την παραγωγισιμότητα στο σημείο $(0, 0)$ τις παρακάτω συναρτήσεις

$$(a) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (b) g(x, y) = ||x| - |y|| + |x| - |y|.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη γράψτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου.

4) Βρείτε, με τον κανόνα της αλυσίδας, την $\frac{d}{dt}[f(\mathbf{c}(t))]$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(a) f(x, y) = xy, \quad \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t), \quad (b) f(x, y, z) = ze^{xy}, \quad \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3, t).$$

5) Αν g είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f(x, y) = g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ δείξτε ότι για $x \neq y$,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

6) Έστω $f(u, v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$ και $g(x, y) = (e^{x-y}, x-y)$. Υπολογίστε την $f \circ g$ και την $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1)$.

Παράδοση: Πέμπτη 27 Μαρτίου