



Τετάρτη 26 Μαρτίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 6

1) Έστω $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $r = \|\mathbf{x}\|$ και $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Στη συνέχεια βρείτε βαθμωτή συνάρτηση f τ.ω. $\nabla f = \mathbf{x}$.

2) Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών δείξτε ότι (κανόνας γινομένου)

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

3) Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί κανείς όταν βρίσκεται στο σημείο $(1, 1)$, ώστε η f

(i) να έχει τη μέγιστη δυνατή αύξηση;

(ii) να έχει τη ελάχιστη δυνατή αύξηση;

(iii) να μην έχει μεταβολή;

Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της f σημείο $(1, 1)$ στην κατεύθυνση $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$;

4) Δίδεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x > 0 \text{ ή } 0 < y < x^2, \\ 2, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δείξτε ότι στο σημείο $(0, 0)$ υπάρχουν **όλες** οι κατα κατεύθυνση παράγωγοι δηλ. ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Παρατηρήστε ότι στο σημείο $(0, 0)$ η συνάρτηση f δεν είναι καν συνεχής!

5) Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην

(i) επιφάνεια $\cos xy = e^z - 2$ στο σημείο $(x, y, z) = (1, \pi, 0)$.

(ii) Στο γράφημα της $f(x, y) = 3x^2 + y^4$ στο σημείο $(x, y) = (0, 1)$,

στη συνέχεια βρείτε τα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα.