



Τετάρτη 2 Απριλίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 7

1) Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$f_y(x, 0) = x, \quad x \in \mathbf{R},$$

συνεπώς

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

Με παρόμοιο τρόπο δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

Είναι η f κλάσης C^2 ;

2) Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, κλάσης C^2 . Έχουμε ορίσει την Λαπλασιανή της f ως

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

(i) Δείξτε ότι $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f)$.

(ii) Αν η f είναι ακτινικά συμμετρική δηλ. $f(x) = g(r)$, όπου $r = \|x\|$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, δείξτε ότι

$$\Delta f(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r).$$

3) Γράψτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

(i) $f(x, y) = \cos xy$, στο σημείο $(1, \pi)$.

(ii) $f(x, y, z) = xe^{y+z}$, στο σημείο $(0, 0, 0)$.

4) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

(i) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 2x + y + 4$

(ii) $f(x, y) = e^x \cos y$

(iii) $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$