



Τετάρτη 9 Απριλίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός II

Φυλλάδιο 8

1) Για τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές Q βρείτε το συμμετρικό πίνακα A έτσι ώστε $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

(i) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_1x_2$,

(ii) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2$,

(iii) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$.

Στη συνέχεια αναγνωρίστε (αν υπάρχουν) τους θετικά ορισμένους.

2) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και προσδιορίστε τη φύση τους

(i) $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$,

(ii) $f(x, y) = e^{-x}(x^2 - y^2)$,

(iii) $f(x, y, z) = x^3 + xz^2 - 3x^2 + y^2 + 2z^2$,

(iv) $f(x, y, z) = xy + xz + 2yz + \frac{1}{x}$,

(v) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

3) Βρείτε το σημείο του επιπέδου $2x - y + 2z = 20$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

4) (i) Για ποιές τιμές του k η συνάρτηση $f(x, y) = kx^2 - 2xy + ky^2$ έχει μή εκφυλισμένο τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$;

(ii) Για ποιές τιμές του k η συνάρτηση $g(x, y, z) = kx^2 + kxz - 2yz - y^2 + \frac{1}{2}kz^2$ έχει μή εκφυλισμένο τοπικό μέγιστο στο $(0, 0, 0)$;

5) Έστω $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία γραμμή $y = mx$, η συνάρτηση $f(x, mx)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $f(x, y)$.

Παράδοση: Τρίτη 29 Απριλίου