



Παρασκευή 13 Ιουνίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Τελικό διαγώνισμα

1)(1,5 μ.) Δίδεται η επιφάνεια $E : xyz^2 + y^2z^3 - 3 - x^2 = 0$ και η καμπύλη $\vec{\sigma}(t) = (\sin t, e^{-t}, e^{2t})$.

(i) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου Π στην επιφάνεια E στο σημείο $(-1, 1, 2)$.

(ii) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε στην καμπύλη $\vec{\sigma}(t)$ στο σημείο $\vec{\sigma}(0)$.

(iii) Σε ποιο σημείο η ε τέμνει το Π ;

2)(2,5 μ.) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Βρείτε $\alpha_0 > 0$, τέτοιο ώστε, όταν $\alpha > \alpha_0$ η $f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ ενώ όταν $\alpha < \alpha_0$ δεν είναι. Τι συμβαίνει στην περίπτωση $\alpha = \alpha_0$;

3)(2 μ.) Βρείτε τα σημεία της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο $(2, -2, 4)$.

4)(2 μ.) Βρείτε και ταξινομήστε (τοπ. μέγιστο, τοπ. ελάχιστο, ή σάγμα) τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y) = y(4 - x^2 - y^2)$ με $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Στη συνέχεια βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$.

5)(2 μ.) Αποδείξτε ότι υπάρχει μια γειτονιά του σημείου $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ και C^1 συναρτήσεις $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ που να λύνουν το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z + u^2 + v^2 &= 2, \\ x + u^3 - v^3 + 3uv &= 2, \\ u(1, -1, 1) &= 1, \quad v(1, -1, 1) = 0. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίστε την ποσότητα

$$u_x(1, -1, 1) + v_x(1, -1, 1)$$

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 50' .