



Δευτέρα 7 Απριλίου 2025

Σ. Φίλιππας

## Απειροστικός Λογισμός II

### Πρόοδος

1)(2 μ.) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 e^y + x e^{xy^2}.$$

(i) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της  $f$  στο σημείο  $(x, y) = (1, 2)$ .

(ii) Ποιά είναι η παράγωγος της  $f$  στο σημείο  $(x, y) = (1, 2)$  στη κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης;

2)(2 μ.) Δίδεται η συνάρτηση  $u(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$  όπου  $f$  είναι παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι η  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u,$$

και βρείτε τη συνάρτηση  $G$ .

3)(3,5 μ.) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Υπολογίστε, εφόσον υπάρχουν, τις  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ . Είναι η  $f$  συνεχής στο  $(0, 0)$ ; Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ ;

4) (2,5 μ.) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας

$$2z \cos z^2 = e^{x-y} - 1,$$

στο σημείο  $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ . Σε ποίο σημείο το εφαπτόμενο επίπεδο τέμνει την ευθεία

$$l(t) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbf{R} \quad ?$$

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

**Διάρκεια εξέτασης 1,5 ώρα.**