



4 Σεπτεμβρίου 2025

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου

1) Δίδεται η επιφάνεια $E : z = x^2 + 2y^2 + 2y - 1$. Βρείτε τα σημεία $P(x_0, y_0, z_0)$ με $x_0 \neq 0$ της επιφάνειας E , με την ιδιότητα η κάθετη ευθεία στην E στο σημείο P να περιέχει την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$.

2) Η αλλαγή μεταβλητών $x = u + v$, $y = uv^2$ μετατρέπει τη συνάρτηση $f(x, y)$ στην $g(u, v)$. Να υπολογισθεί η τιμή της δεύτερης παραγώγου $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ στο σημείο $(u, v) = (1, 1)$ αν γνωρίζουμε ότι σε αυτό το σημείο, ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1.$$

3) Βρείτε και ταξινομήστε (τοπ. μέγιστο, τοπ. ελάχιστο, ή σάγμα) τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y$ με $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Στη συνέχεια βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο χωρίο $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

4) Η τομή του κύλινδρου $x^2 + y^2 = 4$ και του επιπέδου $2x + 2y + z = 2$ είναι η έλλειψη E . Βρείτε τα σημεία της E που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

5) Δίδεται η σχέση $x^3 - y^3 + x^2 + 2y^2 = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει γειτονιά V του σημείου $x = -1$ και C^1 συνάρτηση $f(x)$, $x \in V$ τέτοια ώστε

$$x^3 - f^3(x) + x^2 + 2f^2(x) = 1 \quad \text{και} \quad f(-1) = 1.$$

Δεχόμενοι ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη υπολογίστε την $f''(-1)$.

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα και 50' .