

30

22/5

Άσκηση 1

Βρείτε τα κριτικά σημεία της συνάρτησης:

$f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $\forall$ ένα από τα κριτικά σημεία $(0,0)$, $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$, $(0,\pi)$ ελέγξτε αν είναι σημείο μέγιστου, ελαχίστου ή σαματιού.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \sin(x^2+y^2) = 0 \\ -2y \sin(x^2+y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x^2+y^2=n\pi \\ y=0 \text{ ή } x^2+y^2=n\pi \end{cases}$$

Άρα τα κριτικά σημεία είναι τα $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt{n\pi})$, $(\pm\sqrt{n\pi}, 0)$, $(x, \pm\sqrt{n\pi-x^2})$ για $|x| \leq \sqrt{n\pi}$

• Στο $(0,0)$ έχουμε $f(0,0) = \cos 0 = 1$ και $f(x,y) \leq 1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ οπότε $(0,0)$ η f λαμβάνει ολικό μέγιστο

→

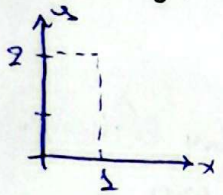
- Στο σημείο $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ έχουμε $f = -1$ και $f(x,y) \geq -1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, άρα στο $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ η f έχει αδικο ελάχιστο
- Στο σημείο $(0, \sqrt{\pi})$ έχουμε $f = -1$ και $f(x,y) \geq -1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ άρα στο $(0, \sqrt{\pi})$ έχω σημείο αδικο ελάχιστου

- * 1^η παρατήρηση: Το κριτήριο των 2^{ων} παραγώγων (διακρίνουσας) δεν μας δίνει συμπέρασμα (πχ) στο $(0,0)$ έχουμε $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0$
- * 2^η παρατήρηση: Το κριτήριο αναφέρεται μόνο σε τοπικά ακρότατα (ελάχιστα/μέγιστα)

Άσκηση 2

Ευτοπίζετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,2]$



* Βήμα 1^ο: Κρίνουμε σημεία στο εσωτερικό του ορθογωνίου
 $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$
 (δεν είναι όμως στο εσωτερικό)

* Βήμα 2^ο: Πιθανά ακρότατα στο σύνορο του χωρίου (σε κάθε πλευρά ξεχωριστά)

- Στην πλευρά $x=0$ με $0 \leq y \leq 2$: η f γίνεται $f=y^2$ (συνάρτηση 1ης μεταβλητής). Τα πιθανά μέγιστα/ελάχιστα είναι στα σημεία μηδενισμού της παραγώγου και στα άκρα του διαστήματος $[0,2]$. Εδώ είναι μόνο τα $y=0$ όπου $f(0,0)=0$ και $y=2$ όπου $f(0,2)=4$
- Στην πλευρά $y=2$ με $0 \leq x \leq 1$: η f γίνεται $f=x^2+2x+4$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ που είναι εκτός του $[0,1]$.
 Στο άκρο $x=1$ έχουμε $f(1,2)=7$ (το άκρο $x=0$ το αναφερόμαστε στην προηγούμενη πλευρά).
- Στην πλευρά $x=1$ με $0 \leq y \leq 2$: η f γίνεται $f=1+y+y^2, 0 \leq y \leq 2$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1+2y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$ που είναι εκτός.
 Στο άκρο $y=0$ έχουμε $f(1,0)=1$.
- Στην πλευρά $y=0$ με $0 \leq x \leq 1$: η f γίνεται $f=x^2$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. Δηλαδή βρήκα πάλι το $(0,0)$

→ Άρα μέγιστο έχουμε στο $(1,2)$ και ελάχιστο στο $(0,0)$

όλα τα πιθανά ακρότατα όπως είδαμε είναι μόνο τα άκρα.

Άσκηση 3

Ευτοπίζετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + yx + y^2$ στον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$

• Βήμα 1^ο: Κρίθιμα σημεία στο εσωτερικό του δίσκου

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad (x,y) = (0,0) \quad \text{έχουμε } f(0,0) = 0.$$

• Βήμα 2^ο: Θα βρούμε τα πιθανά μέγιστα και ελάχιστα της f στο σύνορο του χώρου (δηλ στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$)

(2 τρόποι)

Με παραμετροποίηση του κύκλου $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Άρα η f στον κύκλο
 δίνεται συνάρτηση μόνο της
 μεταβλητής θ : $g(\theta) = f(g(\theta))$:

$$= \underbrace{\cos^2\theta}_{x^2} + \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_y + \underbrace{\sin^2\theta}_{y^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Τα πιθανά μέγιστα/ελάχιστα
 είναι τα άκρα $\theta = 0, \theta = 2\pi$
 όπου $g(0) = 1, f(1,0) = 1$
 και τα σημεία μηδενισμού παρ.
 $x = \cos\theta$ διαθ=0, $y = \sin\theta$ διαθ=0
 $g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow$

$$2\theta = \frac{5\pi}{2} \text{ ή } 2\theta = \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{έχουμε } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = g\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ και}$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η f λαμβάνει μέγιστη
 τιμή $\frac{3}{2}$ στα $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και
 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

και ελάχιστη τιμή στο σημείο
 $(0,0)$ διαθ=0, $\theta = \frac{3\pi}{4}, \theta = \frac{7\pi}{4}$

Ο περιορισμός είναι $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

Άρα λύνουμε το σύστημα

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2\lambda x \\ x + 2y = 2\lambda y \end{cases} \quad y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

άρα βρίσκουμε τα σημεία

$$\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

όπως στον δεύτερο τρόπο