

[illegible]

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΒΗΓΕΙΣ σε όρια, συνέχεια, παραγωγικότητα

Άσκηση 1 Ελέγξτε αν υπάρχουν (και βρείτε) τα παρακάτω όρια:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4 + y^4} \right]$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \right]$$

(5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^2 y^3 \cos \frac{1}{x}}{x^2 + y^4} \right]$

(α)  • Όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του y -άξονα ($x=0$) έχουμε:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{0}{y^4} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{y^4} = 0$$

• Κατά μήκος του x -άξονα ($y=0$) το όριο δίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - 1}{12x^2} = -\infty$$

μυ Άρα το όριο δεν υπάρχει

(6) 

- $(y=0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$
- $(x=y) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-x)}{x^2}$

$$\bullet (x=y) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-x)^2}{x^2+x^2} = 0$$

$\} \text{ dpa ro ope } \cancel{\neq}$

(8) Έχουμε $|x^2 y^3 \cos(\frac{1}{x})| \leq x^2 |y|^3 |\cos(\frac{1}{x})| \leq x^2 |y|^3 \stackrel{(*)}{\leq} \frac{x^4}{2} + \frac{|y|^6}{2}$

$$(*) \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \quad (\beta \text{ γαίρει από την } 0 \leq (\alpha - \beta)^2)$$

Αρα $\frac{|x^2 y^3 \cos(\frac{1}{x})|}{x^2 + y^4} \leq \frac{x^4}{2(x^2 + y^4)} + \frac{|y|^6}{2(x^2 + y^4)} \leq \frac{x^4}{2x^2} + \frac{|y|^6}{2y^4} =$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

Абитулы 2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y} \right]$$

Άσκηση 2 Ελέγξτε αν $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{y} = 1$

→ κατά μήκος του $y=0$ το όριο δίνεται $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = 1$

→ κατά μήκος του $x=0$ το όριο δίνεται: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1$

→ κατά μήκος του $y=x$ το όριο δίνεται: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

→ κατά μήκος του $y=2x$ το όριο δίνεται: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x} = 1$

→ κατά μήκος του $y=\sin 2x$ το όριο δίνεται: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 2x} = 1$

→ κατά μήκος του $y=\cos 2x - 2$ το όριο δίνεται: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{-4 \sin 2x} = 1$

$\rightarrow$ κατά μήκος του $y=0$ το όριο γίνεται:
 $\rightarrow$ κατά μήκος του $x=2$ $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x-2}{2x-2} \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1$

Kata L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \right] \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 2}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{3 \cdot 2x} \quad \begin{array}{l} \text{0} \cdot \infty \text{ w} = 2x \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0} w = 0, \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin w}{w} = 0 \end{array} \quad \frac{-4}{3}$$

Αρα το
όριο
~~Α~~

Άσκηση 3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \cdot \sin y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Νδο:
- (α) $\exists$ μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ και να τις υπολογίσετε
- (β) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$
- (β) $\theta\delta\omega \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0$
(ή να μην υπάρχει)

(α)

$$\begin{aligned} \bullet f_x(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \bullet f_y(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0 \end{aligned}$$

• Για $x=y$ το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δίνεται $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}$

(Μου αρμεί που δεν μάνει 0. Ξεκινά παραφροσύνη ούτε και $\exists$)

Άσκηση 4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- (α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους
- (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0,0)$;

(α) $f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0$
 $f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0$

Αρα οι μερικές παράγωγοι $\exists$ και είναι 0
(αυτό δεν σημαίνει ότι είναι παράγωγη)

(β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0) \cdot x - f_y(0,0) \cdot y|}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Θέλω αυτό το όριο να $\exists$ και να είναι μηδέν

Αρα όχι
παραγωγίσιμη στο $(0,0)$

• για $x=0$: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$
 • για $x=y$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

Για διαφορετικές διαδρομές παίρνω άλλα όρια

Άσκηση 5 Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- (α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους ως προς x ($\frac{\partial f}{\partial x}$) και ως προς y ($\frac{\partial f}{\partial y}$) στο σημείο (x,y)
- (β) Νδο $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$
- (α) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0$ • $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0$
- και για $(x,y) \neq (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ • $\frac{\partial f}{\partial y}$ όμοια (πράγμα)

(β) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y-0}{y} = -1 \checkmark$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-0}{x} = 1 \checkmark$

* Η f δεν είναι C^2 στο $(0,0)$ άρα δεν ισχύει το γνωστό θεωρήμα