

και ΚΛΕΙΣΤΑ

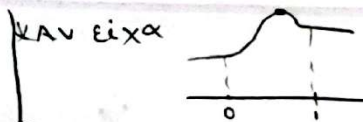
το σύνολο του A .

BURB

(Βαβυλὸν θεωρῆμα αυαίνουσας)

$f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq f(x_\mu) \quad \forall x \in A$. Αυτά θα είναι ορίσματα μέγιστου/ελάχιστου.

Παράδειγμα 1



Θα μπορούσε να έχει ολιγα-
κυρώματα, αλλά δεν είναι ο
μυϊνός (δεν ιβχύνει πάντα)

μ → είναι φραγμένα αλλά δεν λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $B = (0, 1)$

Ενώ στο $A = [0, 1]$ έχω διαυτό θέλω να είναι και
 κλειστό ετός από φραγμένο (για να συμβαίνει πάντα).

Παράδειγμα 2 Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της

$f(x) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ στον υπερβολό δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$ (υπερβαλλόμενος είναι)
Βρίσκουμε το ελάχιστο και το μέγιστο της $f(x)$ στο D προσεγγίζοντας

- Βρίσκω κριτήρια διαμέριξης στο εξωτερικό του διγώνου (είναι υποχρεωτικά ακρότατα).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

← Αυτό το θυμείο προς το παρόν μπορεί να είναι ότι να 'ναι

- Σινορο → παραμετροποίηση ($x^2 + y^2 = 1$): $\vec{G}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Τώρα θα μελετήσω την f πάνω στο σύνολο, δηλ $f(\overline{B}(\epsilon))$

Άρα έχω μια συνάρτηση $g(t) = f(\phi(t))$ μιας μεταβλητής (ΑΠΙ) (32)

$$g(t) = f(\phi(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t + 1, t \in [0, 2\pi]$$

Βρίσκω κριτήριο ευθείας της $g(t) \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow$

$$\text{έχω } g(t) = 2 - \cos t - \sin t, g'(t) = +\sin t - \cos t, \text{ άρα } \left(t = \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ή } \left(t = \frac{\pi}{4} \right)$$

★ Αντι να κάνω τεστ 2ης παραγώγου,

κρίσιμοι σημεία

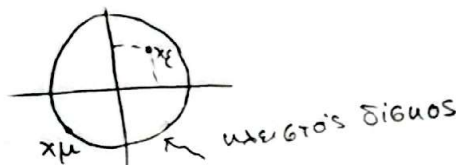
Υπολογίζω την τιμή της f στα κριτήρια ευθείας (3)

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}, f\left(\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{2}$$

↑
ολικό ελάχιστο

(αφού $\sqrt{2} < 1,5$)

↑
ολικό μέγιστο



Παράδειγμα 3 Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^2 - xy + y^2 + 1$ στο κλειστό τετράγωνο A

• Εσωτερικά ευθεία:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$f(0,0) = 1 \quad (1)$$

→ το σημείο (0,0) είναι κριτήριο

• Όριο: Δεν μπορώ να κάνω περιμετριοποίηση, οπότε παίρνω κάθε πλευρά ξεχωριστά

→ στην πλευρά E1: ($y = -1$) άρα $f_1(x) = x^2 + x + 2, 1 \leq x \leq 2$

Βρίσκω κριτήριο ευθείας: $f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Υπολογίζω τιμές: $f(-\frac{1}{2}, -1) = \frac{7}{4}$ (2) (εσωτερικό)

$$\text{και στα άκρα: } f(-1, -1) = 2 \quad (3) \quad f(2, -1) = 7 \quad (4)$$

→ στην πλευρά E2: ($y = 2$) άρα $f_2(x) = x^2 - 2x + 5, 1 \leq x \leq 2$

Βρίσκω κριτήριο ευθείας: $f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Υπολογίζω τιμές: $f(1, 2) = 4$ (5) (εσωτερικό)

$$\text{και στα άκρα: } f(-1, 2) = 8 \quad (6) \quad \text{και } f(2, 2) = 5 \quad (7)$$

→ στην πλευρά E3: ($x = -1$) άρα $f_3(y) = y^2 + y + 2, -1 \leq y \leq 2$

Βρίσκω κριτήριο ευθείας: $f'_3(y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

Υπολογίζω τιμές: $f(-1, -\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$ (8) (εσωτερικό)

→ στην πλευρά E4: ($x = 2$) άρα $f_4(y) = y^2 - 2y + 5, -1 \leq y \leq 2$

Βρίσκω κριτήριο ευθείας: $f'_4(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Υπολογίζω τιμές: $f(2, 1) = 4$ (9)

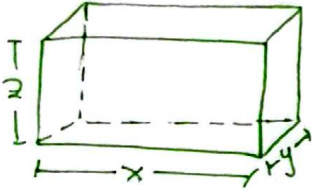
τιμές στα
άκρα έχουν
πρόσ
υπολογιστεί

Άρα από τις 9 σχέσεις που έχω:

• Ολικό μέγιστο: (6) $f(-1, 2) = 8$

• Ολικό ελάχιστο: (1) $f(0, 0) = 1$

Άσκηση 1 Βρείτε τον μέγιστο όγκο κουτιού (ορθογώνιο) με εμβαδόν πλευρών 10m^2
όγκος: $V(x,y,z) = x,y,z$ (αφού έχω υποτεθεί)
εμβαδόν: $2(xy + yz + zx) = 10$ (1)



Σχέση: Ξανν (1) λύνω ως προς z :

$$z = \frac{5-xy}{x+y} \text{ οπότε } V(x,y, \frac{5-xy}{x+y}) = f(x,y) = xy \frac{5-xy}{x+y}, \quad x>0, y>0$$

Τώρα αρκεί να βρω το $\max$ της $f(x,y)$

$$\nabla f = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} (5-2xy-x^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} (5-2xy-y^2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=y \\ 3x^2=5 \end{array} \right\} \Rightarrow x=y=\sqrt{5/3}$$

άρα $z = \frac{5-5/3}{2\sqrt{5/3}} = \sqrt{5/3}$

$x=y=z=\sqrt{5/3}$ Άρα $V_{\max} = (5/3)^{3/2}$ το κουτί με μέγιστο όγκο υπό δεδομένες ευθυμίες είναι ο κύβος

Από μαθηματικές άποψεις, χρειάζεται ακόμα τεστ 2^{ης} παραγώγου για να βεβαιωθώ ότι είναι μέγιστο

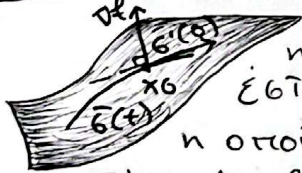
ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ

Βρείτε το $\max$ της $f(x,y)$ όταν τα (x,y) ικανοποιούν $g(x,y)=c$, δηλ τα (x,y) ανήκουν στην επιφάνεια στάθμης της $g(x,y)$

Θεώρημα $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ομαλές, $x_0 \in U$ και έστω $g(x)=c$ (με $g(x_0)=c$ είναι το σύνολο στάθμης, έστω S). Αν η $f|_S$ (περιορισμός της f στην S) έχει μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in S$, τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ και $\nabla g(x_0) \neq 0$

Απόδειξη ΟΧΙ ΑΥΣΤΗΡΙΗ

έστω



$S = \{ (x,y) : g(x,y)=c \}$ και έστω ότι στο $x_0 \in S$ η συνάρτηση $f(x,y)|_S$ λαμβάνει μέγιστη τιμή. έστω $\bar{c}(0)=0$ και τ.ω. $\bar{c}(t) \in S$. Τότε η $f(\bar{c}(t))$ η οποία συνάρτηση είναι $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η $f(\bar{c}(t))$ έχει μέγιστο για $t=0$. Άρα (από Απ.Ι) $\Rightarrow \nabla f(\bar{c}(0)) \cdot \bar{c}'(0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0) \cdot \bar{c}'(0) = 0$
 (άρα είναι κάθετα)
 (όπου το $\bar{c}'(0)$ είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη)

επειδή $\bar{c}(t)$ τυχαία καμπύλη, άρα $\nabla f(x_0) \perp$ στο εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο x_0

Όμως $\nabla g(x_0)$ είναι επίσης $\perp$ στο εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο x_0

Άρα αφού είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο, είναι παράλληλα. Άρα $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Άσκηση 1 Ζανά $f(x,y,z) = xyz$, συνθήκη: $xy + yz + zx = 5$
 βοηθητική παράμετρος (δεν βέβαια χρειάζεται)
 $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \Rightarrow \begin{cases} xy = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \end{cases} \xrightarrow{x,y,z > 0} \lambda = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} = \frac{xy}{x+y} \Rightarrow$
 $g(\bar{x}) = 5$
 $xyz + yz + zx = 5$
 $\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=y=z \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Rightarrow x=y=z = \sqrt{5/3}$
 πολύ πιο γρήγορα από πριν
 παρατηρώ ότι δεν χρειάζεται να υπολογίσω το λ

και εδώ $\exists$ τεστ 2^{ος} παραγώγου, αλλά εδώ δεν θα το κάνουμε γιατί είναι πολύ δύσκολο. Δουλεύω πιο πολύ διαθετιικά παρά αποδεικτικά.

Άσκηση 2 Μια ευθεία περνάει από το $x=-1$ με κλίση 45° , $f(x,y) = x^2 + y^2$.
 Βρείτε τα ακρότατα της $f|_S$.
 Βρίσκω την συνθήκη:
 $y = 2x + 1 \xrightarrow{\substack{x=-1 \\ \psi 45^\circ=1}} y = x + 1$ άρα $g(x,y) = y - x - 1 = 0$

 $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ y - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Συμπερι: ① είναι κυκλικό παραβολοειδές οπότε έχει ελάχιστο
 ② Αν το x είναι y είναι το τυχαίο σημείο, η απόστασή από την αρχή των αξόνων θα είναι $x^2 + y^2$. Οπότε θα κάνω μία κλάση στην ευθεία (ισοσκελές τρίγωνο).
 Άρα από γεωμετρία φέρω ότι η μικρότερη απόσταση σημείου από ευθεία είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στην ευθεία. Άρα έχω ελάχιστο $\leftarrow$ απόδειξη χωρίς κρούση κέρων είδους 2^{ος} παραγώγου

Άσκηση 3 Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 = g(x,y,z)$
 Σημειώνω ότι έχω ένα επίπεδο ($\mathbb{R}^3$) υπό την συνθήκη σφαίρας, η οποία είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο. Άρα η $f|_S$ είναι συνεχώς βεβαιωτό και φραγμένο χωρίο, άρα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή
 $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda z = 1 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \\ z = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

και τώρα είναι φανερό ποιο είναι μέγιστο και ποιο είναι ελάχιστο (τα βάζω στην συνάρτηση)
 $\bullet f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$
 $\bullet f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$
 $\max \quad \min$