

Παράδειγμα 2 ← 6.31. Ώνά με χρώδη πολλαπλασιαστών Lagrange
 Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$, στον ελλειπτικό δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$
 Για τα εσωτερικά σημεία, δεν αλλάζει κάτι. $\left. \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(x = y = \frac{1}{2} \right)$

Για το όριο $x^2 + y^2 = 1$
 Max ή Min της $f(x,y)$ με τον περιορισμό $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

$$\left. \begin{matrix} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2x - 1 = 2\lambda x \\ 2y - 1 = 2\lambda y \\ g = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x(1 - \lambda) = 1 \\ 2y(1 - \lambda) = 1 \\ g = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y = \frac{1}{2(1 - \lambda)} \\ g = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \quad (\text{ομόσημα})$$

Παράδειγμα 1 Βρείτε θετικούς αριθμούς με άθροισμα 18 και max γινόμενο

$$f(x,y,z) = xyz, \quad g(x,y,z) = 18$$

$$\left. \begin{matrix} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 18 = x + y + z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ zx = \lambda \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = y = z = 6 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 6 + 6 + 6 = 18 \\ 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216 \end{matrix}$$

max γινόμενο

Αυτό το γινόμενο μπορώ να το κάνω όσο μικρό θέλω κοντά στο 0.
 Άρα δεν μπορώ να μεγάλωσω για ελάχιστο (πχ για $x = 9, y = 8,5$
 και $z = 0,5$ έχω γινόμενο 38,25, ενώ για $x = 9, y = 8,99$ και
 $z = 0,01$ έχω 0,8091, άρα ελάχιστο πάλι 0)

Τι γίνεται όταν έχω πολλούς περιορισμούς;
 Βρείτε max/min της $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με περιορισμούς
 $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$
 $\vdots$
 $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$
 τότε $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots + \lambda_k \nabla g_k$

↳ με προϋπόθεση $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα

Παράδειγμα 2 Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z) = x + y + z$ υπό
 τις συνθήκες $x^2 + y^2 = 2, x + z = 1$
 $\hookrightarrow g_1(x,y) \quad \hookrightarrow g_2(x,y)$

$$\left\{ \begin{matrix} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = 2 \\ g_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 = \lambda_1 2x + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 2y + 0 \\ 1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \\ g_1 = 2 \\ g_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_1 y = 1/2 \\ g_1 = 2 \\ g_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ z = 1 \\ y = \pm \sqrt{2} \end{matrix}$$

Άρα έχω 2 σημεία: $(0, -\sqrt{2}, 1)$ και $(0, \sqrt{2}, 1)$

$$f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2}$$

min

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}$$

max

• Εμπειροστική $\rightarrow$ Ναι!

• Γιατί; $\hookrightarrow$ Αφού θεωρούμε η τομή των περιορισμών (κύλινδρος και
 επίπεδος) είναι ελλειψική $\hookrightarrow$ κλειστή και φραγμένη ακμή, άρα
 παίρνει max και min

παράδειγμα 3 Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό (36)

ως συνθήκες: $g_1 = x^2 + y^2 - z^2 = 0, g_2 = x + y - z = -2$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda_1 2x + \lambda_2 \\ 2y = \lambda_1 2y + \lambda_2 \\ 2z = -\lambda_1 2z - \lambda_2 \\ g_1 = 0, g_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 2\lambda_1(x-y) \\ \text{άρα } x=y \\ 2x+2 = -2 \Leftrightarrow x = -2 \\ x=y = -2 \pm \sqrt{2}, z = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

* Γιατί $\lambda_1 \neq 0$; $\rightarrow$ έστω $\lambda_1 = 1$ τότε (1) $\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ που δεν το επιτρέπει η $g_2 = -2$

Άρα έχω τα σημεία: $(x,y,z) = (-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$ $(x,y,z) = (-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$

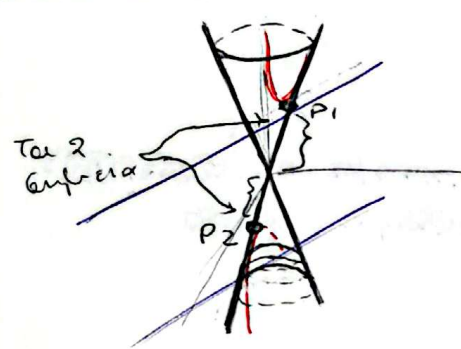
$$\begin{aligned} f(-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}) &= 24 - 16\sqrt{2} \\ f(-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2}) &= 24 + 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

P_1 P_2

$f(P_2) > f(P_1)$
max min
 (κατ' αυξανούσα με x, y, z)

δεν έχει μέγιστο
άλλα ελάχιστο όλων της συνάρτησης το $f(P_1)$

Γεωμετρική συνέψη: g_1 είναι κώνος με κέντρο στο άξονα του άξονα z



τα σημεία που ικανοποιούν και τους 2 περιορισμούς είναι η τομή τους
 (τομή κώνου-επιπέδου) $\rightarrow$ υπερβολή
κωνικές τομές (α μελετούσαν οι αρχαίοι έλληνες)
 Βρήκα το ελάχιστο του ενός κλάδου (ελάχιστη απόσταση από κεντρικό άξονα υπό προϋποθέσεις)
 Άρα $f(P_1)$ είναι η ελάχιστη του ενός κλάδου αλλά δεν
 μπορώ να μιλήσω για μέγιστο (οι υπερβολές επεκτείνονται στο ∞)
 $f(P_2)$ είναι η ελάχιστη του άλλου κλάδου

(Σας εφτάξεις δεν θα μπει κάτι τόσο απαντητικό)

Διάλεξη 19 $f(x,y) = y - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$

- Αν $f(x,y) = 0$ (ή ∞ γενικά) $\Rightarrow f(x,y) = y - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$
- Τι γίνεται όμως αν δεν μπορώ να πω ως προς x ή y ;
 $f(x,y) = \sin(xy) + e^x + y^2 = 5$;
- (παρόμοιο ερώτημα με 3 μεταβλητές) $f(x,y,z) = xy + z + 3xz^3 = 4$
 το $(x,y,z) = (1,0,1)$ ικανοποιεί την σχέση.
 κοντά στο σημείο αυτό, $\exists$ συνάρτηση $g(x,y) = z$ π.ω.
 $xy + g(x,y) = 3xg(x,y) = 4$;
 Μπορώ να ελέγξω κοντά σε σημείο, όχι γενικά

$\uparrow$
 έχω μια **ΠΕΠΛΗΓΜΕΝΗ** σχέση

Θεώρημα πεπλεγμένων συνάρτησης $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ και είναι C^1 , $(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{z} \in \mathbb{R}$, και $f(\bar{x}, \bar{z}) = 0$. Αν $\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{z}) \neq 0$ $\exists$ περιοχή του σημείου $(\bar{x}, \bar{z})$ στην οποία $\exists$ μοναδική συνάρτηση $z = g(\bar{x})$ με $(\bar{z} = g(\bar{x}))$ και $g \in C^1$, στην περιοχή $f(\bar{x}, g(\bar{x})) = 0$. $\odot$ Στον Tromba δίνει κατ'ελάχιστον

→ Δίνει ένα απόλυτο γεμιά μη ερμηνεύσιμη σχέση. Τοπικά όμως από αυτό το σημείο $\exists$ συνάρτηση που απεικονίζει το $\bar{x}$ (ή $\bar{z}$) $\rightarrow$ Τι δεν λέει: • Ποια είναι αυτή η δεικνυιά (είναι υπαρξιακό) • ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης g

παράδειγμα 1 $f(x, y, z) = xy + z + 3xz^4 = 4$ στο $(1, 0, 1)$
Υπολογίζω $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(1, 0, 1)} = 1 + 12xz^3 \Big|_{(1, 0, 1)} = 13 \neq 0$, άρα κοντά στο $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ $\hookrightarrow$ μπορώ να έχω $z = g(x, y)$ με $g \in C^1$ (ή άλλος τρόπος δράσης $z = z(x, y)$)

$\odot \exists y = y(x, z)$? $\checkmark \rightarrow$ Εν δέχεται γίνεται
 $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1, 0, 1)} = x \Big|_{(1, 0, 1)} = 1 \neq 0$ άρα μπορώ να έχω $y = y(x, z)$ κοντά στο $(1, 0, 1)$

$\odot \exists x = x(y, z)$? $\checkmark \rightarrow$ Εν δέχεται γίνεται, αντίστοιχα με y

$\odot$ Μπορώ να υπολογίσω $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ στο $(1, 0, 1)$? $\checkmark \rightarrow$ ΝΑΙ

Κοντά στο $(1, 0, 1)$ έχω $xy + z(x, y) + 3xz^4(x, y) = 4$
Παραγωγίζω τη σχέση ως προς x (το $z(x, y) \rightarrow$ ο βλέπω σαν συνάρτηση των x, y και όχι ως ανεξάρτητη μεταβλητή).

Οπότε: $y + \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + 3z^4(x, y) + 12xz^3(x, y) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0$.

Στο $(1, 0, 1)$ έχω $0 + 2 \cdot (1, 0) + 3 + 12 \cdot 2 \cdot (1, 0) = 0 \Rightarrow 2x(1, 0) = -\frac{3}{13}$

Αν $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(\bar{x}, \bar{z})} \neq 0$ άρα $\exists z = z(x_1, \dots, x_n)$ κοντά στο $(x_0, \dots, x_n, \bar{z})$. Υπολογίζω την $\frac{\partial z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{z})$.

$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, z(x_1, \dots, x_n)) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \Rightarrow$

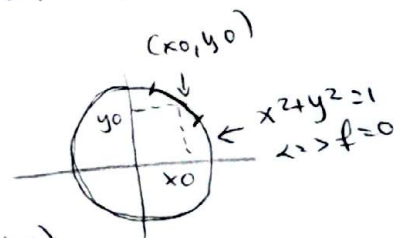
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial z}$ $\leftarrow$ η ίδια η συνθήκη μου εξακολουθεί να ισχύει ότι ο παρονομαστής $\neq 0$

$\rightarrow$ έστω μία απλή συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ (για το σχήμα)

$y = \sqrt{1 - x^2}$ για $x \in (-1, 1)$

$\exists y = y(x)$ για $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ή $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1, 0)} = 0 \right)$
όμως μπορώ να έχω $x = x(y)$ εκεί ∇



παράδειγμα 2 $f(x, y, z) = xyz + z^2 + xz^4 = 3$ στο $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(1,1,1)} = xy + 2z + 4xz^3 \Big|_{(1,1,1)} = 7 \neq 0$ άρα $\exists z = z(x, y)$ κοντά στο $(1, 1, 1)$

και βρείτε το z_x . (όπως πριν) $\leftarrow$ τυπικό ερώτημα
 Με δεδομένο ότι $z \in C^2$, βρείτε $z_{xx} / z_{yy} / z_{xy}$

↳ "πενταδεσμένη διασκόριση" (εδώ ∇ τύπος αλγέβρας να μάθω)

Θα υπολογίσω z_{xx} . Πρώτα βρίσκω z_x
 $yz + xyz_x + 2z^2 z_x + z^4 + 4xz^3 z_x = 0 \xrightarrow{(1,1,1)} 1 + z_x + 2z_x + 1 + 4z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{2}{7}$

Για να παραγωγίσω ως προς x (το $z = z(x, y)$!) ∇

$yz_x + yz_{xx} + 2z^2 z_{xx} + 2z z_x^2 + 4z^3 z_x + 4z^3 z_{xx} + 12xz^2 z_x^2 + 4xz z_{xx} = 0$
 $\xrightarrow{(1,1,1)} -\frac{2}{7} - \frac{2}{7} + 2xx + \frac{2 \cdot 4}{49} + 2z_{xx} + 4(-\frac{2}{7}) + 4(-\frac{2}{7}) + 12 \frac{4}{49} + 4z_{xx} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_{xx} = \dots$

Αν μπει πενταδεσμένη σε διασκόριμα, σίγουρα θα ∇
 Γίνεται 2^η παράγωγος