

Διάλεξη 20

12/5

Έχουμε δει: $f(x, y, z) = 0$. Αν $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ με $z = z(x, y)$ "ευείδω"
και $\nabla f = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z}$

Θεώρημα

ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ

οι f_i $\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \end{array} \right.$

Ερώτηση: Μπορώ να λύσω ως προς $z_1, \dots, z_m$ ως συνάρτηση των $x_1, x_2, \dots, x_n$? $\rightarrow$ **ΝΑΙ** υπάρχει περίπτωση

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ Αν η ορίζουσα $\Delta \neq 0$ στο $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$ τότε $\exists$ περιοχή γύρω από το $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$ που μπορώ να δείξω $z_i = z_i(x_1, \dots, x_n)$ για $i = 1, 2, \dots, m$

$\rightarrow$ Αυτή η ορίζουσα λέγεται **ΙΑΚΩΒΙΑΝΗ**

• είναι ως πρώτων παραγώγων
• αναφέρεται σε διαφομετρική συνάρτηση

Παράδειγμα 1

$$f_1 = x_2 - x_1 \cos y_1 = 5$$

$$f_2 = x_2 \sin y_1 + x_1 y_2 = 2$$

(ii) Υπολογίστε την $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$ στο σημείο

$$(2, 3, \pi, 1).$$

(iii) Υπολογίστε στο $(2, 3, \pi, 1)$ την $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$

(i) Μπορώ να εμφράσω τα y_1, y_2 ως συνάρτηση των x_1, x_2 κοντά στα σημεία:

$$\bullet (x_1, x_2, y_1, y_2) = (2, 3, \pi, 1)?$$

$$\bullet (x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})?$$

Σχηματίζω την Ιακωβιανή:

(i)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \sin y_1 & x_2 \\ x_2 \cos y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 \sin y_1 - x_2^2 \cos y_1$$

(ΤΕΥΙΜΟΣ ΤΟΠΟΣ)

Αρα $\Delta|_{(2,3,\pi,1)} = 4 \cdot 0 - 9(-1) = 9 \neq 0$ ✓ Αρα $\Delta|_{(2,3,\pi,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

$\Delta|_{(0,2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = 0$ ✗

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = y_2 + x_2 y_{2,x_2} + x_1 \sin y_1 y_{1,x_2} = 0$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \sin y_1 + x_2 \cos y_1 y_{1,x_2} + x_1 y_{2,x_2} = 0$

(ως προς των παρασώδων θα είναι θαρμινό)

(ii) Παρασώδω
πεπλεγμένα (εμφαίνει
ότι τα y_1, y_2 είναι
συναρτήσεις) της z
εξίσες που έχω...

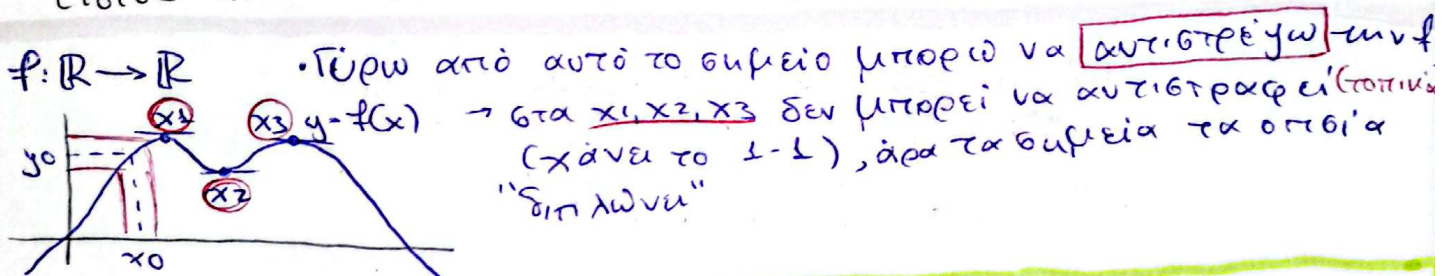
Αντιστάθιση: $\begin{cases} 0 \cdot y_{1,x_2} + 3 y_{2,x_2} = -1 \\ -3 y_{1,x_2} + 2 + 2 y_{2,x_2} = 0 \end{cases} \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \text{βρότυπα} \end{matrix}$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow y_{2,x_2} = -\frac{1}{3} \quad y_{1,x_2} = -\frac{2}{9}$

Ερώτηση θαρμινής άλγεβρας: Πως ξέρω ότι το βρότυπα $Ax=b$

όπου A και πίνακας έχει λογ
($\rightarrow 0$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0$)

(iii) Επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία ($\frac{\partial}{\partial x_1} f_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1} f_2$)
(ίδιος πίνακας, στο βρότυπα $Ax=b$ μόνο το b αλλάζει)



Θεώρημα ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^1$

$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$

Έστω ότι $\vec{f}(\bar{x}) = \bar{y}$

$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0 \end{cases}$

Μπορώ να εκφράσω
τα x_i ως συνάρτηση
των y_i

Απο το Θεώρημα των πεπλεγμένων πρέπει στο σημείο που με
ενδιαφέρει $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, πρέπει $\Delta \neq 0$, $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$ Ιακωβιανή

Αν $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $f \in C^1$ και
 $\Delta \neq 0$ τότε η $\vec{f}$ αντιστρέφεται τοπικά
γύρω στο $\bar{x}_0$

Παράδειγμα 2 $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$
Σε ποια βυμεία η f είναι τοπιικά αντιστρέγιμη;

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Άρα η f είναι τοπιικά αντιστρέγιμη $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Είναι ολικά αντιστρέγιμη; $\rightarrow$ **οχι**

Αφού έχω $f(x, y+2\pi) = f(x, y)$ άρα οι εικόνες αυτών των $\neq 0$ 

Είναι ιδίος, άρα δεν είναι 1-1

(Ουσιαστική διαφορά με την μία διάσταση. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ η f έχει αντιστρόφιο σε όλο το $\mathbb{R}$)

Παράδειγμα 3 $f(x, y) = (x^3, y^3)$. Σε ποια βυμεία είναι τοπιικά αντιστρέγιμη;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{vmatrix} = 9x^2 y^2 \neq 0 \quad \text{όταν } x \neq 0 \text{ και } y \neq 0 \text{ (αποκλεισμός των 2 άξονων)}$$

Ομως αν $x^3 = u \Rightarrow x = u^{1/3}$ και $y^3 = v \Rightarrow y = v^{1/3}$

$$(x, y) = f^{-1}(u, v) = (u^{1/3}, v^{1/3}) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Συνθίση ικανή αλλά όχι αναγκαία Άρα η συνάρτηση είναι παντού τοπιικά αντιστρέγιμη (και ολικά)