

Άσκηση 1 (α) $f(x,y) \in C^1$. Ποια είναι η παράγωγος στην κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης;
 $\rightarrow$ κατεύθυνση της ∇f , παράγωγος κατά κατεύθυνση ∇f :
 $\nabla f \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = |\nabla f|$

(β) Ποιες είναι οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$
 Άρα $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Άσκηση 2 Ποια είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0)$ όταν $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ για $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ορίσμος: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}_0)$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}t^2 + t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{2\sqrt{2}t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Όταν κινούμαστε κατά την κατεύθυνση του $\bar{v}$ στο $(0,0)$, ο ρυθμός αλλαγής της συνάρτησης είναι $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
 $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$

*** $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \nabla f(0,0) \cdot \bar{v} = (0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 0$** είναι σωστό αν f είναι C^1
 Πού βρίσκεται το λάθος; $\rightarrow$ είσοδα ελέγχεται ότι η f δεν είναι τελεστή στο $(0,0)$
 Δεν μπορώ να μιλάω για grad $\leftarrow$ αφού είναι άλλος τρόπος θραύσης της παραγώγου

Από τον ορίσμο: $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \frac{d}{dt} f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) \Big|_{t=0} = \nabla f(\dots) \cdot \bar{v}$
 ΑΠΑΙΤΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

*** Η f έχει όλες τις κατά κατεύθυνση παραγώγους**
 (αν $\bar{v} = \frac{(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$) $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \exists$ όλες στο $(0,0)$ αλλά η f δεν είναι παραίτη (αφού $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$)

Άσκηση 3

Μελετήστε το όριο

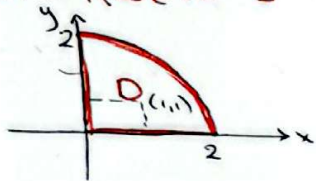
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{3x^2y^2}{4x^6+4y^6} \right]$$

Έστω $y=kx^2$: $f(x,kx^2) = \frac{3kx^6}{4x^6+4k^2x^6} = \frac{3k^2}{4+4k^2}$

το όριο εξαρτάται από το k , άρα $\nexists$

Άσκηση 4

Βρείτε το max της συνάρτησης $f(x,y) = xy e^{-(x^2+y^2)}$ στο χωρίο $D = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$



(το ελάχιστο είναι προφανές ότι είναι 0)

• ψάχνω περιθώρια στο εσωτερικό: $\nabla f = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_x = y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (-x^2) y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$$

$$f_y = x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x y^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow y(1-x^2) = 0 \Rightarrow y=0 \text{ ή } x=1$$

$$x(1-y^2) = 0 \Rightarrow x=0, y=1, y=-1$$

Αρα μόνο το $(1,1)$ είναι εσωτερικό περιθώριο

$$f(1,1) = e^{-1} \quad (1)$$

• Σύνορο θα κοιτάξω μόνο των "περίμετρο του τεταρτοκυκλίου" και όχι πάνω στους άξονες (τους αποκλώ από παρατήρηση)

↳ παραμετροποίηση με Lagrange

$$\vec{c}(t) = 2(\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$g(t) = f(\vec{c}(t)) = 4 \sin t \cos t e^{-2} = 2 \sin(2t) e^{-2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$g'(t) = 4 \cos(2t) e^{-2} = 0, \quad 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ (ευθεία βλέπω)}$$

$$\text{άρα } (x,y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2e^{-2} \quad (2)$$

Αρα έχω μόνο 2 υποψήφια σημεία (για max) $(1) > (2)$

$$\text{Αρα } \max f = f(1,1) = e^{-1}$$

Οραίο

Άσκηση 5

Βρείτε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ που είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα της $f(x,y) = (x^2+y^2) e^{-(x^2+y^2)}$

$$\nabla f = 0, \quad f_x = 2x e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y^2) e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow x(x^2+y^2-1) = 0$$

$$f_y = \dots \Rightarrow y(x^2+y^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} x=0 \text{ και } y=0 \text{ ή } y=1 \text{ ή } y=-1 \\ y=0 \text{ και } x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \end{matrix} \right\} \text{ ή } x^2+y^2=1 \rightarrow \text{περιθώρια σημεία είναι υψώτος } \nabla$$

Αρα περιθώρια σημεία: $(0,0)$ και $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

Δια παρατήρησης, το $f(0,0)$ είναι ο διπλό αχχίγιο

$$\text{Για } x^2+y^2=1 \text{ κάνω } t \in [0, 2\pi] \text{ παρασώδου}$$

$$f_{xx} = 2e^{-1} - 4x^2 e^{-1} - 2(x^2+y^2) e^{-1} - 4x^2 e^{-1} + 4x^2(x^2+y^2) e^{-1}$$

$$f_{yy} = \dots$$

$$f_{xy} = \dots$$

$$\text{Εξισώνω } \begin{vmatrix} -\frac{4x^2}{e} & -\frac{4xy}{e} \\ -\frac{4xy}{e} & -\frac{4y^2}{e} \end{vmatrix} = 0 \quad \nabla \text{ ή εσωτερικό σημείο, test δεν δουλεύει}$$

Συνέχισαν ότι αυτό είναι συνάρτηση του $x^2 + y^2$, τι μου θυμίζει;

ΠΟΛΛΕΣ

υπόθετα από πάλι
μία συνάρτηση μιας
μεταβλητής

$$\rightarrow \text{Αν } r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$f(x, y) = g(r) = r^2 e^{-r^2}$$

$$g'(r) = 2r e^{-r^2} - 2r^3 e^{-r^2} = 2r(1 - r^2) e^{-r^2} = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow r=0 \\ \searrow r=1 \end{matrix}$$

$$\text{και } g''(r) = 2e^{-r^2} - 2r^2 e^{-r^2} - 6r^2 e^{-r^2} + 4r^4 e^{-r^2} = e^{-r^2} (2 - 10r^2 + 4r^4)$$

άρα

$$g''(0) = 2 > 0$$

ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$$g''(1) = \frac{-4}{e} < 0$$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ